

Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen

DISSERTATION

zur

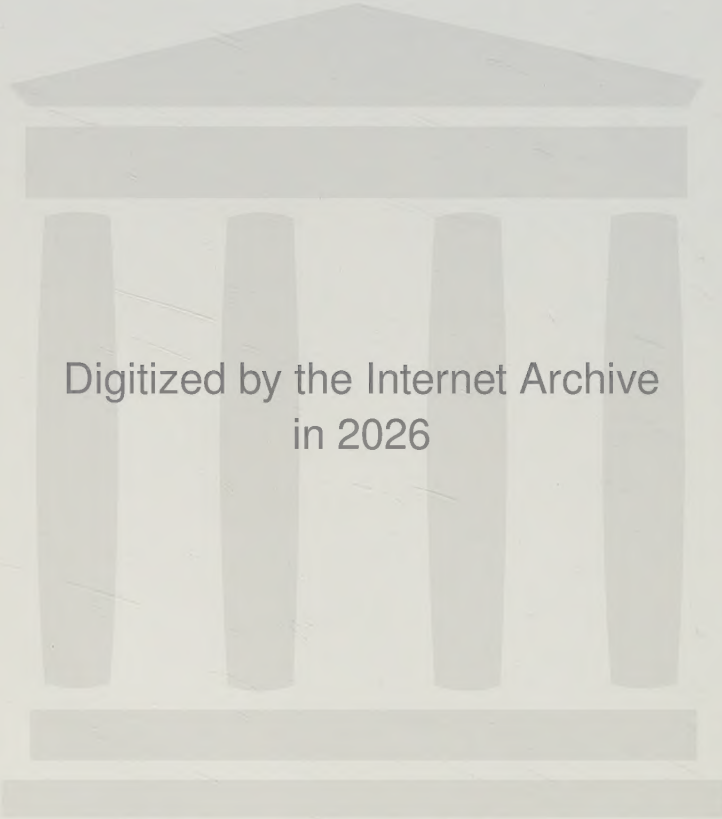
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Werner Haußmann
aus Nürtingen

Bochum 1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546607_0031

Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Werner Haußmann
aus Nürtingen

Bochum 1969



Dissertation eingereicht am 5.12.1968

Tag der mündlichen Prüfung: 3. 2.1969

Dekan: Prof. Dr. G. Ewald

Referent: Prof. Dr. H. Ehlich

Korreferent: Doz. Dr. W. Niethammer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		1
<u>Kapitel I</u>	Existenz und Eindeutigkeit der Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen	
§ 1	Differenzierbare Haar-Systeme	6
§ 2	Hilfsmittel über Tensorprodukte	24
§ 3	Hermite-Interpolation auf Rechteckgittern	29
§ 4	Hermite-Interpolation auf Fastrechteckgittern	54
<u>Kapitel II</u>	Darstellung und Konvergenz von Interpolationsoperatoren in mehreren Veränderlichen	
§ 5	Darstellung von Interpolationspolynomen	62
§ 6	Konvergenz von Fejér- und Hermite-Interpolation	72
§ 7	Konvergenz der Lagrange-Interpolation	95
Literaturverzeichnis		101

Einleitung

Erste Untersuchungen über Interpolation in mehreren Veränderlichen wurden wohl von H. E. SALZER [1945], [1948], [1957] und [1959] angestellt. Eine Zusammenfassung der bis dahin bekannten Ergebnisse über mehrdimensionale Lagrange-Interpolation, sowie Ergänzungen zur Darstellung und numerischen Behandlung finden sich bei W. E. MILNE, W. ARNTZEN, N. REYNOLDS und J. WHEELOCK [1958]. Im Anschluß an diese Monographie erschienen weitere Untersuchungen von H. C. THACHER Jr. [1958], G. WHAPLES [1958], H. C. THACHER Jr. - W. E. MILNE [1960] und H. C. THACHER Jr. [1960]. Hierin werden hauptsächlich Existenz- und Eindeutigkeitsfragen, insbesondere bei der Lagrange-Interpolation, behandelt.

Wir skizzieren die Problemstellung der Lagrange-Interpolation in mehreren Veränderlichen:

Auf einem Punktgitter des $\mathbb{R}^d$ werden reelle Zahlen vorgeschrieben, und es wird gefragt, ob es ein Polynom $P : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, das an den Punkten des Gitters die gegebenen Zahlen als Funktionswerte besitzt. Dabei bedürfen die Begriffe "Punktgitter" und "Polynom" einer Präzisierung. W. E. MILNE et al. [1958] behandeln dieses Problem. Sie benutzen dabei vorwiegend Rechteck-

gitter W als Interpolationsknoten, wobei W durch

$$(0.1) \quad W = \bigotimes_{i=1}^d \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\}$$

gegeben ist, und betrachten algebraische Polynome

$$(0.2) \quad P_{n_1, \dots, n_d}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} a_{j_1, \dots, j_d} x_1^{j_1} \dots x_d^{j_d}.$$

Es liegt die Frage nahe, ob und, wenn ja, in welcher Weise ein d -dimensionales Analogon zur Hermite-Interpolation existiert. Für $d = 1$, also im eindimensionalen Fall, werden bei der (0-1)-Hermite-Interpolation an $n+1$ Punkten $x_0, \dots, x_n$ die reellen Zahlen a_v und a'_v ($v = 0, \dots, n$) vorgegeben. Es existiert dann stets genau ein Polynom

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j$$

mit

$$(0.3) \quad P(x_v) = a_v \quad ; \quad P'(x_v) = a'_v \quad (v = 0, \dots, n).$$

Ansätze zu einer Verallgemeinerung der (0-1)-Hermite-Interpolation machten H. E. SALZER und G. M. KIMBRO [1958] sowie H. C. THACHER Jr. [1960]. Dabei ziehen sie partielle Ableitungen erster Ordnung als Interpolationsbedingungen heran.

Bisher nicht behandelt wurde die folgende Verallgemeinerung der (0-1)-Hermite-Interpolation auf zwei Veränderliche, die als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen dient:

Es sei $W = \bigtimes_{i=1}^2 \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\}$ ein zweidimensionales Rechteckgitter. Gibt es dann zu beliebig vorgeschriebenen reellen Zahlen

$$(0.4) \quad a_{jk}, a'_{jk}, a''_{jk}, a'''_{jk} \quad (j = 0, \dots, n_1; k = 0, \dots, n_2)$$

stets ein Polynom P vom Grad $\leq 2n_1+1$ in x_1 (vgl. (0.2)) so, daß

$$(0.5) \quad \begin{aligned} P(x_{1j}, x_{2k}) &= a_{jk} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial x_1} P(x_{1j}, x_{2k}) &= a'_{jk} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial x_2} P(x_{1j}, x_{2k}) &= a''_{jk} \quad , \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} P(x_{1j}, x_{2k}) &= a'''_{jk} \end{aligned}$$

für $j = 0, \dots, n_1$ und $k = 0, \dots, n_2$ gilt?

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir diese Fragestellung und Verallgemeinerungen, die sich unter Verwendung höherer Ableitungen ergeben.

Im ersten Kapitel untersuchen wir Existenz- und Ein-

deutigkeitsprobleme. Bei der eindimensionalen Lagrange-Interpolation werden seit langem Haar-Systeme verwendet. Entsprechende Verallgemeinerungen für die ein- bzw. mehrdimensionale Hermite-Interpolation - wie sie sich z. B. aus den Anwendungen bei mehrdimensionaler Fourier-Analyse ergeben - wurden bisher nicht betrachtet. Wir werden im folgenden differenzierbare Haar-Systeme bzw. differenzierbare schwache Haar-Systeme der Interpolationsaufgabe zugrunde legen. Obwohl diese Systeme nicht alle Eigenschaften der gewöhnlichen algebraischen Polynome besitzen, ergeben sich kaum zusätzliche Schwierigkeiten.

Für die Behandlung der d -dimensionalen Hermite-Interpolation in § 3 benötigen wir einige bekannte Sätze über Tensorprodukte, die in § 2 kurz ohne Beweise zusammengestellt werden. Die Tensorprodukte gestatten es, die mehrdimensionale Hermite-Interpolation auf "Rechteckgittern" auf geeignete eindimensionale Interpolationsaufgaben zurückzuführen.

Anschließend behandeln wir in § 4 die Interpolation auf "Fastrechteckgittern", die in Spezialfällen von W. E. MILNE et al. [1958] untersucht wurde. Die Lagrange-Interpolation auf "Fastrechteckgittern" scheint für die Theorie der Čebyšev-Approximation im Mehrdimensionalen von Bedeutung zu sein. Auf diese Untersuchungen gehen wir hier aber nicht ein.

Im zweiten Kapitel betrachten wir Darstellungen der mehrdimensionalen Interpolationsoperatoren. Als Spezialfälle ergeben sich bekannte Formeln von W.E. MILNE et al. [1958] bzw. B. MOND und O. SHISHA [1966a]. Anschließend untersuchen wir in § 6 die Konvergenz und Approximationsgüte des mehrdimensionalen verallgemeinerten Hermite-Operators. Dabei gehen wir von der Verallgemeinerung eines Satzes von P. P. KOROVKIN [1960] über monotone Operatoren aus. Wie im eindimensionalen Fall spielen hier mehrdimensionale P -normale Gitterpunktsysteme eine wesentliche Rolle. Im Spezialfall der Fejér-Interpolation erhalten wir hier eine Verschärfung der Ergebnisse von B. MOND und O. SHISHA [1966a]. Abschließend untersuchen wir die Konvergenz des mehrdimensionalen Lagrange-Operators auf P -normalen Gitterfolgen für stetige bzw. differenzierbare Funktionen.

Herrn Prof. Dr. Hartmut Ehlich möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge herzlich danken.

Kapitel I Existenz und Eindeutigkeit der Hermite-

Interpolation in mehreren Veränderlichen

§ 1 Differenzierbare Haar-Systeme

Wir gehen vom allgemeinen Interpolationsproblem aus, wie es bei P. J. DAVIS [1965] dargestellt ist:

Y sei ein linearer Raum der Dimension $n+1$ über $\mathbb{R}$, und $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ seien $n+1$ lineare Funktionale auf Y . Unter welchen Voraussetzungen gibt es dann zu $n+1$ reellen Zahlen $a_0, \dots, a_n$ ein Element $y \in Y$ so, daß

$$(1.1) \quad \varphi_j(y) = a_j \quad (j = 0, \dots, n)$$

gilt? Zur Beantwortung dieser Frage zitieren wir zwei Sätze, die sich z. B. bei P. J. DAVIS [1965] finden. Es bezeichne dabei Y^* den (algebraischen) Dualraum von Y .

Satz 1.1

Es sei Y ein linearer Raum der Dimension $n+1$ über $\mathbb{R}$, $y_k \in Y$ ($k = 0, \dots, n$) und $\varphi_j \in Y^*$ ($j = 0, \dots, n$). Je zwei der folgenden Aussagen ziehen die dritte

nach sich:

(a) $\{y_0, \dots, y_n\}$ ist eine Basis von Y .

(b) $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ ist eine Basis von Y^* .

(c) Es gilt: $\det \varphi_j(y_k) \neq 0$ für $j, k = 0, \dots, n$.

Satz 1.2

Es sei Y ein $(n+1)$ -dimensionaler linearer Raum über $\mathbb{R}$ und $\{y_0, \dots, y_n\}$ eine Basis von Y . Genau dann besitzt das Interpolationsproblem (1.1) für beliebige reelle Zahlen $a_0, \dots, a_n$ eine Lösung, wenn die $n+1$ linearen Funktionale $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind.

$y = \sum_{j=0}^n \alpha_j y_j$ ist dann eindeutig bestimmt.

Um die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung eines Interpolationsproblems nachzuweisen, brauchen wir nach den vorangehenden Sätzen nur zu zeigen, daß für eine Basis $\{y_0, \dots, y_n\}$ von Y und für die $n+1$ Interpolationsfunktionale $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ gilt:

$$\det \varphi_j(y_k) \neq 0 \text{ für } j, k = 0, \dots, n.$$

Bemerkung 1.3

Zum Nachweis der Regularität der Matrix $(\varphi_j(y_k))$ benutzen wir den wohlbekannten Satz aus der linearen

Algebra:

Es sei A eine $m \times m$ -Matrix. Genau dann ist A regulär, wenn das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt.

Bemerkung 1.4

Das obige Interpolationsproblem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn für $a_0 = \dots = a_n = 0$ nur das Nullelement aus Y Lösung von (1.1) ist.

Von dieser Tatsache werden wir im folgenden häufig Gebrauch machen.

Wir treffen noch einige Festsetzungen:

Für die lineare Hülle von Elementen $y_0, \dots, y_m$ eines reellen linearen Raumes Y benutzen wir die Bezeichnung

$$\mathcal{L}(y_0, \dots, y_m) = \left\{ \sum_{k=0}^m \beta_k y_k \mid \beta_k \in \mathbb{R} \text{ für } k=0, \dots, m \right\}.$$

Unter $\mathbb{N}_*$ verstehen wir die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Als Grundräume für die Interpolationsprobleme nehmen wir Räume stetig differenzierbarer Funktionen. Wie üblich setzen wir für $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) :

$$C^k(a, b) = \{ f \mid f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f^{(k)} \text{ stetig} \}.$$

("Nullmal stetig differenzierbar" bedeute dann stetig.)
An Stelle von $C^0(a,b)$ schreiben wir $C(a,b)$. Weiterhin
benutzen wir die folgendermaßen definierten Interpolationsfunktionale:

Es sei

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b ,$$

$$m = \sum_{j=0}^n (m_j + 1) - 1 \quad \text{mit } m_j \geq 0 ,$$

$$k \geq \sup \{ m_j \mid 0 \leq j \leq n \}$$

und $\mathcal{L}(f_0, \dots, f_m)$ ein $(m+1)$ -dimensionaler Teilraum
von $C^k(a,b)$. In Y^* seien die linearen Punktfunktionale
 L_{ju} durch

$$(1.2) \quad L_{ju}(f) = f^{(u)}(x_j) \quad \text{für} \quad \begin{matrix} j = 0, \dots, n \\ u = 0, \dots, m_j \end{matrix}, \quad f \in Y$$

definiert.

Das allgemeine Hermite-Interpolationsproblem $\mathcal{I}(\text{AH})$

läßt sich nun wie folgt formulieren:

Gibt es zu beliebigen $a_{ju} \in \mathbb{R}$ ein $g \in Y$ so, daß

$$L_{ju}(g) = a_{ju} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} j = 0, \dots, n \\ u = 0, \dots, m_j \end{matrix}$$

ist? Unter welchen Voraussetzungen ist gegebenenfalls

g eindeutig bestimmt?

Das hier formulierte allgemeine Interpolationsproblem ist bekanntlich mit algebraischen Polynomen vom Grad $\leq m$ eindeutig lösbar (vgl. M. MÜLLER [1955], P. J. DAVIS [1965]).

Wir weisen auf einige Spezialfälle hin:

1.) Lagrange-Interpolation $\mathcal{I}(L)$:

Das Lagrange-Interpolationsproblem $\mathcal{I}(L)$ liegt für $m_j = 0$ ($j = 0, \dots, n$) vor. Es ist dann $m = n$.

2.) (0-p)-Hermite-Interpolation $\mathcal{I}(pH)$:

Das (0-p)-Hermite-Interpolationsproblem ist für $m_j = p$ ($j = 0, \dots, n$) gegeben. Es ist dann $m = (n+1)p - 1$. Speziell gilt $\mathcal{I}(L) = \mathcal{I}(0H)$.

Besondere Erwähnung verdient die gewöhnliche (0-1)-Hermite-Interpolation $\mathcal{I}(1H) = \mathcal{I}(H)$, die für $p = 1$ vorliegt.

3.) Fejér-Interpolation $\mathcal{I}(F)$:

Das Fejér-Interpolationsproblem $\mathcal{I}(F)$ ist ein Spezialfall des $\mathcal{I}(H)$. Die Interpolationsfunktionale sind durch

$$(1.3) \quad L_{j0}(f) = f(x_j), \text{ aber } L_{j1}(f) = 0$$

für $j = 0, \dots, n$ gegeben.

Können als Basis von Y die Potenzen $1, x, \dots, x^m$ verwendet werden, so schreiben wir für die verschiedenen Interpolationsprobleme $\mathcal{I}'(L)$, $\mathcal{I}'(H)$, usw.

Die soeben formulierten Interpolationsprobleme wollen wir für Teilräume von $C^k(a, b)$ lösen. Dazu bedarf es einiger Betrachtungen über die "Mehrfachheit" einer Nullstelle x_0 von $f \in C^k(a, b)$.

Wenn $f \in C^\infty(a, b) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(a, b)$ ist, wird die Vielfachheit einer Nullstelle x_0 folgendermaßen definiert:
 x_0 ist Nullstelle der (exakten) Vielfachheit $r \in \mathbb{N}$ von f , wenn

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(r-1)}(x_0) = 0; f^{(r)}(x_0) \neq 0$$

ist.

Diese Definition versagt bei Funktionen, die aus $C^{r-1}(a, b)$, aber nicht aus $C^r(a, b)$ sind. Deshalb führen wir einen anderen Begriff für die "Mehrfachheit" von Nullstellen ein, der im Falle stetiger Funktionen schon von J. R. RICE [1964] benutzt wurde, und den wir für differenzierbare Funktionen rekursiv definieren.

Definition 1.5

$f \in C(a, b)$ besitze in $[a, b]$ endlich viele Nullstellen.

Für $k = 1, 2$ heißt $x_0 \in (a, b)$ Nullstelle der Multiplizität

k von f in $C(a,b)$, kurz k -Nullstelle von f in $C(a,b)$, sofern gilt:

$$(a) f(x_0) = 0 ;$$

(b) Es gibt eine Umgebung $U(x_0)$ so, daß gilt:

$$\text{sign}(f| \{U \cap (a, x_0)\}) = (-1)^k \text{sign}(f| \{U \cap (x_0, b)\}) \neq 0.$$

Nullstellen am Rand von $[a,b]$ gelten stets als 1-Nullstellen in $C(a,b)$. Aus formalen Gründen bezeichnen wir ein $y_0 \in [a,b]$ mit $f(y_0) \neq 0$ als 0-Nullstelle.

Bemerkung 1.6

Für 1-Nullstellen von f in $C(a,b)$ folgt die Bedingung (a) in Definition 1.5 aus (b). Bei 2-Nullstellen in $C(a,b)$ ist dies nicht der Fall.

Ist $x_0 \in (a,b)$ eine 1-Nullstelle in $C(a,b)$, so wechselt f bei x_0 sein Vorzeichen. Bei einer 2-Nullstelle von f in $C(a,b)$ wechselt f sein Vorzeichen dagegen nicht.

Ist $[a,b]$ echt in (α, β) enthalten, und ist $f \in C(\alpha, \beta)$, so bedingt die obige Definition, daß eine 2-Nullstelle in a oder b von f aus $C(\alpha, \beta)$ als 1-Nullstelle von f als Element von $C(a,b)$ angesehen wird.

Wir erweitern die Definition der Multiplizität in

Definition 1.7

$f \in C^r(a,b)$ mit $r \geq 1$ habe endlich viele Nullstellen in $[a,b]$; $x_0 \in (a,b)$ heißt Nullstelle der Multiplizität k

von f in $C^r(a,b)$, kurz k -Nullstelle von f in $C^r(a,b)$, falls gilt:

(a) $f(x_0) = 0$;

(b) f' besitzt in x_0 eine $(k-1)$ -Nullstelle in $C^{r-1}(a,b)$.

Nullstellen am Rand von $[a,b]$ werden stets als 1-Nullstellen in $C^r(a,b)$ angesehen. x_0 heißt 0-Nullstelle von f in $C^r(a,b)$, falls $f(x_0) \neq 0$.

Es ist zu beachten, daß im Innern stets $0 \leq k \leq r + 2$ und am Rand $0 \leq k \leq 1$ gilt.

Die Multiplizität einer Nullstelle hängt nach obigem wesentlich davon ab, welcher Raum $C^r(a,b)$ zugrunde gelegt wird. Z. B. ist 0 eine 2-Nullstelle von $f(x) = x^6 \in C(-1,1)$, aber eine 6-Nullstelle von f in $C^r(-1,1)$ für $r \geq 4$.

Bemerkung 1.8

Bei den Definitionen 1.5 und 1.7 haben wir vorausgesetzt, daß die betrachtete Funktion f nur endlich viele Nullstellen besitzt. Dies bedeutet für unsere Untersuchungen keine Einschränkung, da die für die Interpolation wichtigen Haar-Systeme stets diese Eigenschaft besitzen.

Definition 1.9 (vgl. G. MEINARDUS [1964])

Der Teilraum $Y \subset C(a,b)$ erfüllt die Haarsche Bedingung vom Grad m (bzw. heißt Haar-System vom Grad m), wenn gilt:

- (a) $\dim Y = m + 1$;
- (b) Jedes $g \in Y$, das nicht identisch verschwindet, besitzt höchstens m Nullstellen in $[a,b]$.

Die Menge aller Haar-Systeme vom Grad m , die auf $[a,b]$ definiert sind, bezeichnen wir mit $H_m^O(a,b)$.

In Definition 1.9 werden alle auftretenden Nullstellen nur einmal gezählt. Es gilt aber

Satz 1.10 (J. R. RICE [1964])

Jedes Element $g \neq 0$ eines Haar-Systems $Y \in H_m^O(a,b)$ besitzt höchstens m Nullstellen unter Berücksichtigung der Multiplizität in $C(a,b)$.

Die Lagrange-Interpolationsaufgabe läßt sich mit Haar-Systemen aus $H_n^O(a,b)$ eindeutig lösen (vgl. G. MEINARDUS [1964]). Zur (0-1)- und zur allgemeinen Hermite-Interpolation reichen gewöhnliche Haar-Systeme nicht aus. Deshalb führen wir differenzierbare und differenzierbare schwache Haar-Systeme ein.

Definition 1.11

Der Teilraum $Y \subset C^r(a,b)$ heißt r -mal differenzierbares schwaches Haar-System vom Grad m , wenn gilt:

(a) $\dim Y = m + 1$;

(b) Jedes $g \in Y^j = \{f^{(j)} \mid f \in Y\}$ mit $g \neq 0$ besitzt für $j = 0, \dots, r$ höchstens m Nullstellen in $[a,b]$.

Die Menge aller r -mal differenzierbaren schwachen Haar-Systeme vom Grad m , die auf $[a,b]$ definiert sind, bezeichnen wir mit $S_m^r(a,b)$.

Trivialerweise gilt $S_m^0(a,b) = H_m^0(a,b)$ und $S_m^r(a,b) \subset H_m^0(a,b)$.

Ein Beispiel für ein (beliebig oft) differenzierbares schwaches Haar-System vom Grad m ist der Raum

$Y = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_m)$ mit

$$f_j : x \longrightarrow e^{(j+1)x} \quad (j = 0, \dots, m) .$$

Im folgenden verallgemeinern wir das Ergebnis von J. R. RICE [1964]. Dazu zeigen wir

Lemma 1.12

Es sei $x^* \in (a,b)$ eine 2-Nullstelle von f in $C^1(a,b)$.

Dann ist x^* auch 2-Nullstelle von f in $C(a,b)$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist x^* eine 2-Nullstelle von f in $C^1(a,b)$, also ist x^* eine 1-Nullstelle von f' in $C(a,b)$. Nach Definition 1.5 gibt es eine Umgebung $U = U(x^*)$ so, daß

$$\text{sign}(f'|\{U \cap (a, x^*)\}) = - \text{sign}(f'|\{U \cap (x^*, b)\}) \neq 0,$$

d.h. f' wechselt bei x^* sein Vorzeichen. Wegen $f(x^*) = 0$ gilt

$$(1.4) \quad f(x) = \int_{x^*}^x f'(\xi) d\xi.$$

In $U \cap (x^*, b)$ sei o.B.d.A. $f' > 0$. Dann gilt nach (1.4) für $x \in U \cap (x^*, b)$: $f(x) > 0$. In $U \cap (a, x^*)$ ist $f' < 0$, also

$$-f(x) = \int_x^{x^*} f'(\xi) d\xi < 0$$

für $x \in U \cap (a, x^*)$, d.h. es ist

$$\text{sign}(f|\{U \cap (x^*, b)\}) = \text{sign}(f|\{U \cap (a, x^*)\}) \neq 0$$

und $f(x^*) = 0$. Nach Definition 1.5 ist x^* also eine 2-Nullstelle von f in $C(a,b)$.

Mit diesem Lemma beweisen wir

Satz 1.13

Es sei $Y \in S_{2n+1}^1(a,b)$. Ferner gelte für die $n+1$ Punkte

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$$

und ein $g \in Y$

$$g(x_k) = g'(x_k) = 0 \quad (k = 0, \dots, n) .$$

Dann ist g das Nullelement von Y .

Beweis:

Annahme: Es sei $g \neq 0$. Weil $g \in Y$ und $Y \in S_{2n+1}^1(a,b)$ ist, besitzt g höchstens $2n+1$ Nullstellen. Nach Definition 1.7 hat g an den x_k ($k = 0, \dots, n$) σ_k -Nullstellen in $C^1(a,b)$ mit $2 \leq \sigma_k \leq 3$.

Fall I:

Es gibt ein $s \in \{0, \dots, n\}$ mit $\sigma_s = 3$. Die Ableitung g' hat dann an den Stellen x_k ($k = 0, \dots, n$; $k \neq s$) jeweils τ_k -Nullstellen in $C(a,b)$ mit $\tau_k = \sigma_k - 1 \geq 1$, x_s ist aber eine 2-Nullstelle von g' in $C(a,b)$. Nach dem Satz von Rolle hat g' in (x_k, x_{k+1}) für $k=0, \dots, n-1$ noch je eine ϱ_k -Nullstelle ξ_k mit $\varrho_k \geq 1$. Unter Berücksichtigung der Multiplizität in $C(a,b)$ besitzt daher g'

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k + \sum_{k=0}^n \tau_k \geq n + n + 2$$

Nullstellen in $C(a,b)$ im Widerspruch zu $g \in Y \in S_{2n+1}^1(a,b)$ und $g \neq 0$.

Fall II:

g besitzt in (a,b) $n+1$ Nullstellen x_k ($k = 0, \dots, n$) der exakten Multiplizität 2 in $C^1(a,b)$. Nach Lemma 1.12 besitzt g dann $(n+1)$ 2-Nullstellen in $C(a,b)$. Dies führt wegen $g \neq 0$, $g \in Y \in S_{2n+1}^1(a,b)$ und Satz 1.10 zum Widerspruch.

Satz 1.14

Ist $Y \in S_{2n+1}^1(a,b)$, so sind die Interpolationsaufgaben $\mathcal{I}(H)$ und $\mathcal{I}(F)$ bezüglich Y eindeutig lösbar, wenn a und b nicht als Interpolationsknoten gewählt werden.

Beweis:

Aus Satz 1.13 folgt, daß für $g \in Y$, Interpolationsknoten aus (a,b) und

$$L_{ju}(g) = 0 \quad (j = 0, \dots, n; u = 0, 1)$$

gilt: g ist Nullelement von Y . Nach Bemerkung 1.4 sind dann $\mathcal{I}(H)$ und $\mathcal{I}(F)$ bezüglich Y eindeutig lösbar.

Bemerkung 1.15

Es ist zu beachten, daß bei den differenzierbaren schwachen Haar-Systemen die Endpunkte des Intervalls $[a,b]$ nicht als Interpolationspunkte gewählt werden dürfen. Diese Einschränkung kann aufgehoben werden, falls das differenzierbare schwache Haar-System seine Eigenschaften nicht verliert, wenn das Intervall $[a,b]$ nach beiden Seiten echt erweitert wird.

Bemerkung 1.16

Polynome $P(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^j$ vom Grad $\leq m$ erfüllen die Bedingung, daß P' einen Grad $\leq m-1$ besitzt. Mit dieser (relativ scharfen) Bedingung kann ein Analogon zu Satz 1.14 leicht bewiesen werden. Bemerkenswert ist bei den differenzierbaren schwachen Haar-Systemen, daß ein $g \in Y$ mit $Y \in S_m^1(a,b)$ höchstens m und die Ableitung g' ebenfalls höchstens m (und nicht höchstens $m-1$!) Nullstellen besitzen kann und dennoch das Problem $\mathcal{I}(H)$ bezüglich Y eindeutig lösbar ist.

Um sogar das $\mathcal{I}(AH)$ zu lösen, führen wir nun eine den Polynomen entsprechende schärfere interpolations-theoretische Bedingung ein und kommen so zu den differenzierbaren Haar-Systemen.

Definition 1.17

Der Teilraum $Y \subset C^r(a,b)$ heißt r -mal differenzierbares Haar-System vom Grad m mit $r \leq m$, wenn

$$(1.5) \quad Y^j = \{f^{(j)} \mid f \in Y\} \in H_{m-j}^0(a,b)$$

für $j = 0, \dots, r$ gilt.

Die Menge aller r -mal differenzierbaren Haar-Systeme vom Grad m bezeichnen wir mit $H_m^r(a,b)$. Offenbar gilt $H_m^r(a,b) \subset S_m^r(a,b)$.

Z.B. ist die Menge aller Polynome vom Grad $\leq m$ für jedes $r \leq m$ ein Element von $H_m^r(a,b)$.

Satz 1.18

Ist $Y \in H_m^r(a,b)$, so besitzt $g \in Y$ ($g \neq 0$) unter Berücksichtigung der Multiplizität in $C^r(a,b)$ höchstens m Nullstellen.

Beweis:

Wir führen den Beweis durch Induktion nach r :

- (a) Für $Y \in H_m^0(a,b)$ ist die Behauptung nach Satz 1.10 richtig.
- (b) Die Behauptung sei für ein $r \geq 0$ und für alle $m \geq r$ bewiesen. Wir zeigen: Dann gilt sie auch für $r+1$ und beliebiges $m \geq r+1$.

Falls g von vornherein keine Nullstellen besitzt,
gilt die Behauptung trivialerweise.

Wir können daher voraussetzen, daß g mindestens eine
Nullstelle besitzt. Wegen $g \in Y$, $Y \in H_m^{r+1}(a,b)$ und
 $g \neq 0$ gilt: Es gibt genau n Punkte ($n \leq m+1$) in $[a,b]$
so, daß g an den Stellen

$$(1.6) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

Nullstellen der Multiplizitäten

$$(1.7) \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n$$

in $C^{r+1}(a,b)$ besitzt. Wir zeigen, daß dann

$$M = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m$$

ist. Annahme: Es sei $M > m$. Wir betrachten die Nullstellen
von g' . An den Stellen (1.6) besitzt g' Nullstellen der
Mindest-Multiplizitäten

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 1, \quad \dots, \quad \alpha_n - 1$$

in $C^r(a,b)$. Nach dem Satz von Rolle hat g' in
(x_j, x_{j+1}) für $j = 1, \dots, n-1$ jeweils mindestens eine
Nullstelle. Also besitzt g' , da die Behauptung für
 $g' \in Y^1$ nach Induktionsvoraussetzung erfüllt ist, mindestens

$$M' = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) + n - 1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j - 1 = M - 1 \geq m$$

Nullstellen unter Berücksichtigung der Multiplizität in $C^{r-1}(a,b)$. Da $Y^1 \in H_{m-1}^0(a,b)$ und $g' \in Y^1$ ist, muß $g' = 0$ und damit $g = 0$ sein, da g mindestens eine Nullstelle besitzt. Wir haben damit einen Widerspruch zur Voraussetzung $g \neq 0$ erhalten.

Satz 1.19

Es sei

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

$$N = \sum_{j=0}^n (m_j + 1) - 1, \quad m_j \geq 0$$

und

$$m \geq \sup \{ m_j \mid 0 \leq j \leq n \}.$$

Ist $Y \in H_N^m(a,b)$, so ist das allgemeine Hermite-Interpolationsproblem $\mathcal{I}(AH)$ bezüglich Y eindeutig lösbar.

Beweis:

Wir benutzen Bemerkung 1.4 und zeigen: Wenn $g \in Y$ und

$$(1.8) \quad L_{ju}(g) = 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, n \quad \text{und } u = 0, \dots, m_j,$$

so gilt $g = 0 \in Y$. Aus (1.8) folgt nämlich, daß g bei

den x_j ($j = 0, \dots, n$) je eine (m_j+1) -Nullstelle in $C^m(a,b)$ besitzt. Unter Berücksichtigung der Multiplizität in $C^m(a,b)$ sind dies

$$\sum_{j=0}^n (m_j + 1) = N + 1$$

Nullstellen. Weil $Y \in H_N^m(a,b)$ ist, folgt nach Satz 1.18, daß $g = 0$ ist.

§ 2 Hilfsmittel über Tensorprodukte

Wir stellen in diesem Paragraphen diejenigen Tatsachen über Tensorprodukte von endlich-dimensionalen linearen Räumen und hierauf definierten linearen Funktionalen bereit, die wir zur Lösung von Interpolationsproblemen in d Veränderlichen benötigen ($d \in \mathbb{N}$). Für Tensorprodukte von zwei linearen Räumen bzw. zwei linearen Funktionalen finden sich diese Ergebnisse bei W. H. GREUB [1963], für d -fache Tensorprodukte verweisen wir auf N. BOURBAKI [1948].

Im folgenden sei stets $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

Definition 2.1

Gegeben seien die $d+1$ linearen Räume $E_1, \dots, E_d$ und M über $\mathbb{R}$. Eine d -lineare Abbildung

$$\varphi: E = \bigotimes_{i=1}^d E_i \longrightarrow M \text{ mit}$$

$$\varphi: (x_1, \dots, x_d) \longrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_d) = x_1 \otimes \dots \otimes x_d$$

heißt ein Tensorprodukt, wenn gilt:

$$(T1) \quad \mathcal{L}(\{\varphi(x_1, \dots, x_d) \mid (x_1, \dots, x_d) \in E\}) = M ;$$

(T2) Ist f eine d -lineare Abbildung von E in einen linearen Raum N über $\mathbb{R}$, so existiert eine

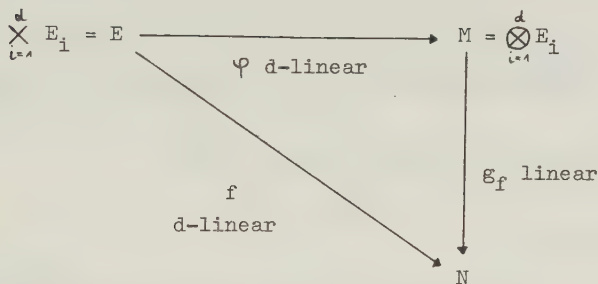
lineare Abbildung g_f von M in N so, daß

$f = g_f \circ \varphi$ ist.

M heißt das Tensorprodukt der Räume $E_1, \dots, E_d$. Es

wird mit $\bigotimes_{i=1}^d E_i$ oder $E_1 \otimes \dots \otimes E_d$ bezeichnet.

Wir veranschaulichen den vorliegenden Sachverhalt in dem folgenden Diagramm:



Satz 2.2

Zu d linearen Räumen $E_1, \dots, E_d$ über $\mathbb{R}$ gibt es stets einen linearen Raum M und eine d -lineare Abbildung φ mit den Eigenschaften (T1) und (T2).

$M = \bigotimes_{i=1}^d E_i$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir durften daher in Definition 2.1 von "dem" Tensorprodukt der Räume $E_1, \dots, E_d$ sprechen.

Bei den bisherigen Begriffsbildungen und Aussagen

brauchten wir die E_i ($i = 1, \dots, d$) nicht als endlich-dimensional vorauszusetzen. Im folgenden Satz wird diese Einschränkung wesentlich.

Satz 2.3

$E_1, \dots, E_d$ seien d endlich-dimensionale lineare Räume über $\mathbb{R}$ und $\{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ Basen der E_i . Dann bildet die Menge

$$\{a_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes a_{j_d}^d \mid j_i = 0, \dots, n_i ; i = 1, \dots, d\}$$

eine Basis des Tensorproduktes $\bigotimes_{i=1}^d E_i$.

Korollar 2.4

Für endlich-dimensionale lineare Räume $E_1, \dots, E_d$ über $\mathbb{R}$ gilt:

$$\dim \bigotimes_{i=1}^d E_i = \prod_{i=1}^d \dim E_i .$$

Wir wenden uns jetzt dem Tensorprodukt von linearen Funktionalen zu:

Es seien die (n_i+1) -dimensionalen linearen Räume E_i für $i = 1, \dots, d$ über $\mathbb{R}$ und deren Basen $\{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ gegeben. Zu $\varphi_i \in E_i^*$ ($i = 1, \dots, d$) definieren wir folgende d -lineare Abbildung:

$$\phi : E = \bigotimes_{i=1}^d E_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi : (x_1, \dots, x_d) \longrightarrow \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i) .$$

Wegen (T2) gibt es eine lineare Abbildung

$$\chi : \bigotimes_{i=1}^d E_i \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$(2.1) \quad \chi(x_1 \otimes \dots \otimes x_d) = \prod_{i=1}^d \varphi_i(x_i) .$$

Dabei wird χ durch $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ eindeutig bestimmt.

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$\Omega : \bigotimes_{i=1}^d E_i^* \longrightarrow \left(\bigotimes_{i=1}^d E_i \right)^* ,$$

die durch

$$\Omega : (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \longrightarrow \chi$$

gegeben ist. Es gilt

Satz 2.5

Die Abbildung $\Omega : (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \longrightarrow \chi = \Omega(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ ist ein Tensorprodukt.

Damit gilt also: $\bigotimes_{i=1}^d E_i^* \cong \left(\bigotimes_{i=1}^d E_i \right)^* .$

Mit den obigen Bezeichnungen schreiben wir $\chi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_d$.

Bemerkung 2.6

Nach dem Vorstehenden können wir eine Basis von

$\bigotimes_{i=1}^d E_i$ bzw. $\bigotimes_{i=1}^d E_i^*$ durch die Gesamtheit der Tensor-
 produkte $a_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes a_{j_d}^d$ bzw. $\varphi_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes \varphi_{j_d}^d$ er-
 halten, wenn $\{a_0^i, \dots, a_{n_i}^i\}$ bzw. $\{\varphi_0^i, \dots, \varphi_{n_i}^i\}$ für
 $i = 1, \dots, d$ Basen von E_i bzw. E_i^* sind.

Diese Tatsache werden wir im nächsten Paragraphen bei
 der Interpolation in mehreren Veränderlichen benutzen.

§ 3 Hermite-Interpolation auf Rechteckgittern

Bei der Lagrange-Interpolation in d Veränderlichen ($d \in \mathbb{N}$) werden (vgl. W. E. MILNE et al. [1958]) als Interpolationsbedingungen lineare Funktionale der Form

$$(3.1) \quad \varphi(P_{n_1 \dots n_d}) = P_{n_1 \dots n_d}(x_{1k_1}, \dots, x_{dk_d})$$

verwendet. Hierbei ist $(x_{1k_1}, \dots, x_{dk_d}) \in \mathbb{R}^d$ und $P_{n_1 \dots n_d}$ ein Polynom der Gestalt

$$(3.2) \quad P_{n_1 \dots n_d}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} a_{j_1 \dots j_d} x_1^{j_1} \dots x_d^{j_d}.$$

Charakteristisch für die Hermite-Interpolation (in einer Veränderlichen) ist die Verwendung von Interpolationsfunktionalen der Form

$$(3.3) \quad \bar{\varphi}(Q_{2n+1}) = \frac{d}{dx} Q_{2n+1}(\bar{x})$$

mit $Q_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j x^j$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}$. An die Stelle der Funktionale (3.3) treten bei der Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen Interpolationsfunktionale, die mit Hilfe von partiellen Ableitungen definiert werden, etwa

$$(3.4) \quad \hat{\varphi}(P_{2n_1+1 \dots 2n_d+1}) = \frac{\partial}{\partial x_r} P_{2n_1+1 \dots 2n_d+1}(x_{1k_1}, \dots, x_{dk_d})$$

mit $P_{2n_1+1} \dots 2n_d+1$ aus (3.2), $r \in \{1, \dots, d\}$ und $(x_{1k_1}, \dots, x_{dk_d}) \in \mathbb{R}^d$. Es können auch gemischte und andere höhere partielle Ableitungen als Interpolationsbedingungen dienen.

Wir betrachten zunächst an einem einfachen Fall Art und Anzahl der Interpolationsbedingungen bei der Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen, um dann in diesem Paragraphen die allgemeine Hermite-Interpolation im $\mathbb{R}^d$ zu untersuchen.

Bei der (0-1)-Hermite-Interpolation in zwei Veränderlichen (vgl. Einleitung) benutzen wir die Polynome

$$(3.5) \quad P(x_1, x_2) = \sum_{j_1=0}^{2n_1+1} \sum_{j_2=0}^{2n_2+1} a_{j_1, j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}.$$

Diese besitzen $(2n_1 + 2) \cdot (2n_2 + 2) = 4(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ Koeffizienten $a_{j_1, j_2} \in \mathbb{R}$ ($j_1 = 0, \dots, 2n_1+1$; $j_2 = 0, \dots, 2n_2+1$). Durch geeignete Interpolationsfunktionale müssen wir diese Koeffizienten festlegen. Dies geschieht durch ein lineares Gleichungssystem. Da wir als Ziel die eindeutige Lösbarkeit dieses Gleichungssystems (d.h. des Interpolationsproblems) haben, benötigen wir ebenso-viele Gleichungen wie Koeffizienten, also $4(n_1+1)(n_2+1)$. Jede Gleichung ergibt sich in der Form

$$(3.6) \quad \varphi_j(P) = a_j \quad (a_j \in \mathbb{R})$$

für $j = 0, \dots, 4(n_1+1)(n_2+1)$, wobei jedes der φ_j ein lineares Funktional ist. Zur Festlegung dieser linearen Funktionalen, d.h. als Interpolationsknoten, verwenden wir das Gitter

$$W = \bigotimes_{i=1}^2 \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\} \subset \mathbb{R}^2, \quad$$

das $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ Punkte besitzt. Aus Anzahlgründen müssen wir für jeden Punkt von W vier Interpolationsbedingungen stellen. (Später werden wir - soweit möglich - von dieser "gleichmäßigen Verteilung" der Bedingungen abgehen.) Für jeden Punkt $(x_{1k_1}, x_{2k_2}) \in W$ bieten sich als Interpolationsbedingungen die linearen Funktionalen

$$\begin{aligned} \varphi^I(P) &= P(x_{1k_1}, x_{2k_2}), \\ \varphi^{II}(P) &= \frac{\partial}{\partial x_1} P(x_{1k_1}, x_{2k_2}), \\ \varphi^{III}(P) &= \frac{\partial}{\partial x_2} P(x_{1k_1}, x_{2k_2}), \\ \varphi^{IV}(P) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} P(x_{1k_1}, x_{2k_2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit einem Polynom P vom Grad $\leq 2n_1 + 1$ in x_1 (vgl. (3.5)) an. Es zeigt sich, daß bei Benutzung von W als Interpolationsknoten alle diese $4(n_1+1)(n_2+1)$ Funktionalen linear unabhängig sind, das Interpolationsproblem also eindeutig lösbar ist (vgl. Satz 1.2).

φ^I , φ^{II} und φ^{III} wählen wir deshalb, weil das zweidimensionale Hermite-Interpolationsproblem eine Verallgemeinerung des eindimensionalen darstellen soll. φ^{IV} scheint etwas willkürlich gewählt zu sein. Wir wollen kurz begründen, weshalb wir diese Wahl treffen:

Wir gehen davon aus, daß als vierte Interpolationsbedingung bei $(x_{1k_1}, x_{2k_2}) \in W$ ein lineares Funktional gewählt werden soll, das durch eine partielle Ableitung möglichst niedriger Ordnung beschrieben werden kann. Neben φ^{IV} bieten sich also die linearen Funktionalen φ^V und φ^{VI} an, die durch

$$\varphi^V(P) = \frac{\partial^1}{\partial x_i^1} P(x_{1k_1}, x_{2k_2})$$

und

$$\varphi^{VI}(P) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P(x_{1k_1}, x_{2k_2})$$

definiert sind.

Benutzen wir etwa für jeden Punkt $(x_{1k_1}, x_{2k_2}) \in W$ die Funktionalen φ^I , φ^{II} , φ^{III} und φ^V , so läßt sich dieses Interpolationsproblem im allgemeinen nicht mehr lösen.

Mit φ^I und φ^{II} werden nämlich dem Polynom P an allen Punkten $(x_{1k_1}, x_{2k_2}) \in W$ der betreffende Funktionswert

und die erste partielle Ableitung nach x_1 vorgeschrieben. Wir betrachten P für festes x_{2k} ($k \in \{0, \dots, n_2\}$). Da an den $n+1$ Punkten $(x_{10}, x_{2k}), \dots, (x_{1n_1}, x_{2k})$ auf der Geraden $x_{2k} = \text{const.}$ Funktionswert und erste partielle Ableitung nach x_1 vorgeschrieben sind, und P in x_1 einen Grad $\leq 2n_1 + 1$ besitzt, ist P längs $x_{2k} = \text{const.}$ nach Satz 1.19 eindeutig festgelegt. Also liegen insbesondere auch die zweiten partiellen Ableitungen nach x_1 von P für die Punkte $(x_{10}, x_{2k}), \dots, (x_{1n_1}, x_{2k})$ fest. Dies gilt für jedes $k = 0, \dots, n_2$. Also läßt sich die rechte Seite von (3.6) bei Benutzung von φ^V nicht mehr beliebig vorschreiben, d.h. das betrachtete Interpolationsproblem hat im allgemeinen keine Lösung. Derselbe Fall tritt ein, wenn wir φ^{VI} an Stelle von φ^V benutzen.

Das mit den Bedingungen (3.7) definierte zweidimensionale (0-1)-Hermite-Interpolationsproblem ist in gewisser naheliegender Weise zwei eindimensionalen (0-1)-Hermite-Interpolationsproblemen "zugeordnet" und läßt sich daher eindeutig lösen (vgl. Satz 3.9). Wir werden diese "Zuordnung", die sich mit Hilfe von Tensorprodukten linearer Räume und linearer Funktionale ausdrücken läßt, im folgenden bei der d -dimensionalen Interpolation auch für kompliziertere Fälle als der (0-1)-Hermite-Interpolation untersuchen.

Zunächst treffen wir in der Vorbemerkung einige Vereinbarungen und Definitionen:

Vorbemerkung:

In diesem Paragraphen sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$ fest vorgegeben (der Fall $d = 1$ ist trivial), und es gelte stets: Der Index i läuft von $1, \dots, d$, ohne daß dies jeweils erwähnt wird.

Wir benötigen häufig Elemente aus $\mathbb{N}_*^d$ bzw. $\mathbb{R}^d$. Sie werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die i -te Komponente ist jeweils der entsprechende kleine Buchstabe, indiziert mit i . Zur Vereinfachung dagegen setzen wir $n = (n, n, \dots, n) \in \mathbb{N}_*^d$, sofern keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Im $\mathbb{R}^d$ führen wir eine Halbordnung ein. Für $A, B \in \mathbb{R}^d$ setzen wir fest:

$$A \leq B \quad \text{genau dann, wenn } a_i \leq b_i .$$

Weiter gelte

$$A < B \quad \text{genau dann, wenn } a_i < b_i .$$

Summe, α -faches und Produkt definieren wir komponentenweise, also z.B.

$$A + B = (a_1 b_1, \dots, a_d b_d) .$$

Ferner benutzen wir für die d -fache Summation die

Abkürzung

$$\sum_{N=0}^M a_N : = \sum_{n_1=0}^{m_1} \dots \sum_{n_d=0}^{m_d} a_{n_1 \dots n_d}$$

mit $M = (m_1, \dots, m_d)$ und $N = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}_*^d$ und $a_N = a_{n_1 \dots n_d} \in \mathbb{R}$ für $0 \leq N \leq M$. Durchläuft N alle Elemente mit $0 \leq N \leq M$, so schreiben wir auch $N = 0, \dots, M$.

Zur Interpolation in d Veränderlichen brauchen wir einen Grundraum Y und Funktionale aus Y^* . Wir betrachten zunächst Y :

Definition 3.1

Es seien $N, R \in \mathbb{N}_*^d$ und $\{f_1^0, \dots, f_1^{n_1}\}$ d Mengen von linear unabhängigen Elementen aus $C^{R_i}(a_i, b_i)$. Für $k_i = 0, \dots, n_i$ gelte: $f_i^{k_i}$ ist eine Funktion der Veränderlichen x_i .

Dann verstehen wir unter einem R -mal partiell differenzierbaren Polynom P vom Grad $\leq N$ in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_d$ jeden Ausdruck

$$(3.8) \quad P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_d=0}^{n_d} a_{j_1 \dots j_d} f_1^{j_1}(x_1) \dots f_d^{j_d}(x_d)$$

mit $a_{j_1 \dots j_d} \in \mathbb{R}$.

P ist eine Abbildung von $E = \bigotimes_{i=1}^d [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Polynome (bei festen Basisfunktionen $f_i^{j_i}$) mit $\mathcal{D}_N^R$. An Stelle der Schreibweise (3.8) benutzen wir nach Möglichkeit

$$(3.9) \quad P(X) = \sum_{j=0}^N a_j \cdot F^j(X) .$$

Dabei setzen wir $F^j(X) = f_1^{j_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}(x_d)$.

Legen wir die Basisfunktionen $1, x_1, \dots, x_1^{n_1}$ zugrunde, so schreiben wir X^j statt $F^j(X)$.

Lemma 3.2

Es seien $\{f_i^0, \dots, f_i^{m_i}\}$ $m_i + 1$ linear unabhängige Elemente aus $C^{r_i}(a_i, b_i)$ und $\mathcal{D}_{m_i}^{r_i} := \mathcal{L}(f_i^0, \dots, f_i^{m_i})$.

Dann gilt:

$$(3.10) \quad \mathcal{D}_M^R = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{D}_{m_i}^{r_i} .$$

Beweis:

Jedes $f_i \in \mathcal{D}_{m_i}^{r_i}$ besitzt genau eine Darstellung

$$(3.11) \quad f_i = \sum_{j_i=0}^{m_i} a_{ij_i} \cdot f_i^{j_i} .$$

Wir definieren die d -lineare Abbildung ω von

$$Z := \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{D}_{m_i}^{r_i} \longrightarrow \mathcal{D}_M^R \quad \text{durch}$$

$$(3.12) \quad (f_1, \dots, f_d) \longrightarrow \omega(f_1, \dots, f_d) = f_1 \otimes \dots \otimes f_d \\ = \sum_{j=0}^M a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{dj_d} \cdot f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}.$$

Es muß nachgewiesen werden, daß die Bedingungen (T1) und (T2) aus Definition 2.1 erfüllt sind:

(T1): Da die Menge $\{f_1 \otimes \dots \otimes f_d\}$ insbesondere alle Produkte

$$f_1^{j_1} \otimes \dots \otimes f_d^{j_d} = f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}$$

enthält, folgt unmittelbar: $\mathcal{D}_M^R \subset \mathcal{L}(\omega(Z))$, wenn $\omega(Z)$ das Bild von Z unter ω ist.

Es sei umgekehrt $P \in \mathcal{L}(\omega(Z))$. Dann hat P die Darstellung

$$(3.13) \quad P = \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{j=0}^M a_{1j_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot a_{dj_d}^{(j)} \cdot f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d} \right)$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, k$. Aus (3.13) folgt

$$P = \sum_{j=0}^M \left(\sum_{j=1}^k a_j \cdot a_{1j_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot a_{dj_d}^{(j)} \right) \cdot f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}.$$

Setzen wir

$$a_{j_1} \dots j_d = \sum_{j=1}^k a_j \cdot a_{1j_1}^{(j)} \cdot \dots \cdot a_{dj_d}^{(j)},$$

so folgt: $P \in \mathcal{D}_M^R$, also $\mathcal{L}(\omega(Z)) \subset \mathcal{D}_M^R$.

(T2): Es sei φ eine d -lineare Abbildung von Z in irgendeinen linearen Raum H über $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(3.14) \quad \varphi(f_1, \dots, f_d) = \varphi\left(\sum_{j_1=0}^{m_1} a_{1j_1} f_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_d=0}^{m_d} a_{dj_d} f_d^{j_d}\right) \\ = \sum_{j_1=0}^M a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{dj_d} \cdot \varphi(f_1^{j_1}, \dots, f_d^{j_d}).$$

Gegeben sei weiter die d -lineare Abbildung ω aus (3.12). Wir weisen die Existenz einer linearen Abbildung

$$\chi : \mathcal{D}_M^R \longrightarrow H$$

nach mit $\varphi = \chi \circ \omega$. Dazu legen wir die lineare Abbildung χ auf einer Basis von $\mathcal{D}_M^R$ fest. Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$\left\{ f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d} \mid J = 0, \dots, M \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{D}_M^R$ ist. Wir setzen also fest:

$$\chi(f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}) = \varphi(f_1^{j_1}, \dots, f_d^{j_d})$$

für $J = 0, \dots, M$. Damit erhalten wir

$$\chi \circ \omega\left(\sum_{j_1=0}^{m_1} a_{1j_1} \cdot f_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_d=0}^{m_d} a_{dj_d} \cdot f_d^{j_d}\right) \\ = \chi\left(\sum_{j_1=0}^M a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{dj_d} \cdot f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^M a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{dj_d} \cdot \chi(f_1^{j_1} \cdot \dots \cdot f_d^{j_d}) \\
 &= \sum_{j=0}^M a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{dj_d} \cdot \varphi(f_1^{j_1}, \dots, f_d^{j_d}) .
 \end{aligned}$$

Die d-Linearität von φ liefert die Behauptung.

Wir wollen jetzt die Funktionale aus $Y^* = \mathcal{D}_M^{R*}$ definieren, die wir als Interpolationsfunktionale verwenden. Dazu brauchen wir zunächst

Definition 3.3

Es seien die reellen Zahlen

$$(3.15) \quad a_i \leq x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{in_i} \leq b_i$$

gegeben. Dann heißt

$$W = \bigtimes_{i=1}^d W_i = \bigtimes_{i=1}^d \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\}$$

ein d-dimensionales N-Rechteckgitter.

Die Menge aller d-dimensionalen N-Rechteckgitter bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_N$. $W \in \mathcal{R}_N$ ist eine endliche Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit $\prod (n_i+1)$ Punkten. Wir nennen W auch die Menge der Interpolationsknoten.

Bemerkung 3.4

Für das Gitter $W \in \mathcal{R}_N$ können wir $(x_{1j_1}, \dots, x_{dj_d}) = X_J \in W$ mit $J \in \mathbb{N}_*^d$ vermöge der bijektiven Abbildung

$$(3.16) \quad W \ni (x_{1j_1}, \dots, x_{dj_d}) \longleftrightarrow (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}_*^d$$

identifizieren. Mit dieser Identifizierung gilt:

$$W = \{ J \mid J \in \mathbb{N}_*^d, \quad J = 0, \dots, N \}.$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir $J \in W$ und $X_J \in W$ gleichberechtigt benutzen.

Nach Lemma 3.2 gilt: $\mathcal{D}_M^R = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{D}_{m_i}^{r_i}$. Wir wollen auf $\mathcal{D}_M^R$ und $\mathcal{D}_{m_i}^{r_i}$ lineare Funktionale definieren und einen Zusammenhang zwischen ihnen herstellen.

Mit $W = \bigotimes_{i=1}^d W_i \in \mathcal{R}_N$ definieren wir die linearen Funktionale $L_{j_i u_i}$ (vgl. (1.2)) :

$$(3.17) \quad L_{j_i u_i}(P) = \frac{d^{u_i}}{dx_i^{u_i}} P(x_{1j_i})$$

$$(j_i \in W_i, \quad u_i \in \mathbb{N}_* \quad \text{mit} \quad 0 \leq u_i \leq r_i \quad \text{und} \quad P \in \mathcal{D}_{m_i}^{r_i}).$$

Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher führen wir noch eine Bezeichnung für deren partielle Ableitungen ein. Dabei bedeutet $C^R(E)$ die Menge aller auf $E \subset \mathbb{R}^d$ definierten Funktionen f , für die $\frac{\partial^{\Sigma v_i}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_d^{v_d}} f$ existiert und stetig ist und deren Bilder in $\mathbb{R}$ liegen.

Es sei $0 \leq U \leq R \in \mathbb{N}_*^d$ und $f \in C^R(E)$. Dann verstehen

wir unter $D^U f$ den Ausdruck

$$(3.18) \quad D^U f = \frac{\partial^{\sum u_i}}{\partial x_1^{u_1} \dots \partial x_d^{u_d}} f$$

Da $f \in C^R(E)$ ist, existieren alle diese partiellen Ableitungen und sind stetig. Also kommt es nicht auf die Differentiationsreihenfolge an.

Definition 3.5

Es seien $N, R \in \mathbb{N}_*^d$ und $W \in \mathcal{R}_N$. Ferner seien d Mengen $M_i = \{m_{i0}, \dots, m_{in_i}\} \subset \mathbb{N}_*$ mit $r_i \geq \sup\{m_{ij} \mid 0 \leq j \leq n_i\}$ gegeben. Für $X_J \in W$ setzen wir fest

$$(3.19) \quad T(J) = \{K \mid K \in \mathbb{N}_*^d, 0 \leq K \leq (m_{1j_1}, \dots, m_{dj_d})\}.$$

Ferner sei $m_1 = \sum_{j=0}^{n_i} (m_{ij} + 1) - 1$.

$T(J) = T(X_J)$ ist die Menge der verschiedenen d -tupel an der Stelle X_J , die kleiner oder gleich $(m_{1j_1}, \dots, m_{dj_d})$ sind. Diese d -tupel benutzen wir später zur Festlegung von Interpolationsbedingungen.

Jetzt können wir das lineare Funktional $L_{JU} \in \mathcal{D}_M^{R*}$ einführen:

Wie in Definition 3.5 seien d Mengen M_i gegeben. Dann definieren wir das lineare Funktional L_{JU} durch

$$(3.20) \quad L_{JU}(P) = D^U_P(X_J)$$

für $P \in \mathcal{D}_M^R$, $0 \leq J \leq N$ und $U \in T(J)$.

Lemma 3.6

Es seien $N, R \in \mathbb{N}_*^d$, $W \in \mathcal{R}_N$ und die d Mengen M_i wie in Definition 3.5 gegeben. Es gelte $M = (m_1, \dots, m_d)$.

Für $0 \leq J \leq N$ und $U \in T(J)$ folgt dann

$$(3.21) \quad L_{JU} = L_{j_1 u_1} \otimes \dots \otimes L_{j_d u_d} \in \mathcal{D}_M^{R*}.$$

Beweis:

Es sei $P \in \mathcal{D}_M^R$. Dann gilt mit der Vereinfachung

L_i statt $L_{j_i u_i}$ (vgl. auch Satz 2.5):

$$\begin{aligned} (L_1 \otimes \dots \otimes L_d)P &= [\Omega(L_1, \dots, L_d)](P) \\ &= [\Omega(L_1, \dots, L_d)] \left(\sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_d=0}^{m_d} a_{k_1 \dots k_d} f_1^{k_1} \cdot \dots \cdot f_d^{k_d} \right) \\ &= \sum_{K=0}^M a_K [\Omega(L_1, \dots, L_d)](f_1^{k_1} \cdot \dots \cdot f_d^{k_d}) \\ &= \sum_{K=0}^M a_K (L_1(f_1^{k_1}) \otimes \dots \otimes L_d(f_d^{k_d})) \\ &= \sum_{K=0}^M a_K \frac{\partial^{u_1} f_1^{k_1}}{\partial x_1^{u_1}} (x_1 j_1) \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{u_d} f_d^{k_d}}{\partial x_d^{u_d}} (x_d j_d). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität der partiellen Ableitungen gilt:

$$= \frac{\partial^{\sum u_i}}{\partial x_1^{u_1} \dots \partial x_d^{u_d}} \left(\sum_{K=0}^M a_K \cdot F^K \right)(X_J) = D^U_P(X_J).$$

Wir können jetzt das allgemeine Hermite-Interpolationsproblem in d Veränderlichen $\mathcal{I}(\text{AH}^d)$ formulieren und lösen. Ausgangspunkt sind d Probleme $\mathcal{I}_i(\text{AH})$:

Voraussetzungen: Es sei

$$a_i \leq x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{in_i} \leq b_i \quad ,$$

$$m_i = \sum_{j=0}^{n_i} (m_{ij}+1) - 1 \text{ mit } m_{ij} \geq 0,$$

$$r_i \geq \sup \{m_{ij} \mid 0 \leq j \leq n_i\}$$

und $\mathcal{L}(f_i^0, \dots, f_i^{m_i}) = Y_i$ ein (m_i+1) -dimensionaler Teilraum von $C^{r_i}(a_i, b_i)$.

Dann lautet das $\mathcal{I}_i(\text{AH})$:

Gibt es zu beliebigen $a_{j_i} u_i \in \mathbb{R}$ ein $P \in Y_i$ so, daß

$$(3.22) \quad L_{j_i} u_i(P) = a_{j_i} u_i \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} j_i = 0, \dots, n_i \\ u_i = 0, \dots, m_{ij} \end{array}$$

ist?

Nach Satz 1.19 ist dieses Problem für $Y_i \in H_{m_i}^{r_i}(a_i, b_i)$ eindeutig lösbar.

Mit diesen Vorbereitungen lautet das $\mathcal{I}(\text{AH}^d)$:

Es seien die Voraussetzungen zu d Problemen $\mathcal{I}_i(\text{AH})$ gegeben, und W sei das zugehörige N-Rechteckgitter.

Gibt es dann zu vorgegebenen $a_{JU} \in \mathbb{R}$ ein $P \in \mathcal{D}_M^R$ so, daß

$$(3.23) \quad L_{JU}(P) = a_{JU} \quad \text{für} \quad \begin{cases} J, U \in \mathbb{N}_*^d, \quad 0 \leq J \leq N \\ 0 \leq U \leq (m_{1j_1}, \dots, m_{dj_d}) \end{cases}$$

und alle $J \in W$ und alle $U \in T(J)$ gilt?

Wir formulieren das $\mathcal{I}(\mathcal{A}H^d)$ noch einmal in einer anschaulicheren Fassung:

Es seien d Probleme $\mathcal{I}_i(\mathcal{A}H)$ gegeben, und

$W = \bigtimes_{i=1}^d \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\}$ sei das zugehörige N -Rechteckgitter. Gibt es dann ein Polynom $P \in \mathcal{D}_M^R$ so, daß am Punkt $X_J \in W$ alle partiellen Ableitungen $D^U P$ mit $U \in T(J)$ vorgeschrieben werden können?

Wir untersuchen jetzt, wann das $\mathcal{I}(\mathcal{A}H^d)$ eindeutig lösbar ist. Dazu treffen wir

Definition 3.7

Gegeben seien die Voraussetzungen von d Interpolationsproblemen $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_d$, wie sie in § 1 dargestellt wurden:

$\mathcal{I}_1$: Es sei Y_1 ein (n_1+1) -dimensionaler linearer Raum über $\mathbb{R}$, und es seien $\varphi_{i0}, \dots, \varphi_{in_i} \in Y_1^*$.

Dann verstehen wir unter dem den Problemen $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_d$

zugeordneten Problem I^d das folgende:

Es sei $Y = \bigotimes_{i=1}^d Y_i$ und die $(n_0+1) = \prod_{i=1}^d (n_i+1)$ linearen Funktionale $\varphi_{1k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{dk_d} \in Y^*$ gegeben ($0 \leq K \leq N$). Diese Funktionale seien durchnummeriert:

$\varphi_0, \dots, \varphi_{n_0}$. Gibt es dann zu n_0+1 reellen Zahlen $a_0, \dots, a_{n_0}$ ein $y \in Y$ so, daß

$$(3.24) \quad \varphi_j(y) = a_j \quad (j = 0, \dots, n_0) \quad ?$$

Wenden wir diese Definition auf die $\mathcal{I}_i(AH)$ an, so erhalten wir aus Lemma 3.2 und Lemma 3.6 unmittelbar

Satz 3.8

Das Interpolationsproblem $\mathcal{I}(AH^d)$ ist den d Interpolationsproblemen $\mathcal{I}_i(AH)$ zugeordnet.

Wir kommen nun dazu, Aussagen über Interpolationsprobleme zu machen, die anderen, eindeutig lösbaren, zugeordnet sind.

Hauptsatz 3.9

Wenn jedes der I_i aus Definition 3.7 eindeutig lösbar ist, so ist auch das zugeordnete Problem I^d eindeutig lösbar.

Beweis:

Nach Satz 1.2 gilt wegen der eindeutigen Lösbarkeit der

I_i : Die auf dem (n_i+1) -dimensionalen linearen Raum Y_i definierten linearen Funktionale $\varphi_{i0}, \dots, \varphi_{in_i}$ sind linear unabhängig. Aus Dimensionsgründen bilden sie eine Basis von Y_i^* . Nach Korollar 2.4 gilt:

$$\dim Y = \dim \bigotimes_{i=1}^d Y_i = \prod_{i=1}^d \dim Y_i = \prod_{i=1}^d (n_i+1) = n_0+1.$$

Ebenso ist $\dim Y^* = n_0 + 1$. Nach Satz 2.3 ist die Menge der $n_0 + 1$ linearen Funktionale $\varphi_{1k_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{dk_d} \in Y^*$ mit $0 \leq k \leq N$ eine Basis von Y^* . Wir numerieren diese Funktionale wie in Definition 3.7: $\varphi_0, \dots, \varphi_{n_0}$. Damit gilt: $\varphi_0, \dots, \varphi_{n_0}$ sind $n_0 + 1$ linear unabhängige lineare Funktionale auf dem (n_0+1) -dimensionalen linearen Raum Y . Nach Satz 1.2 ist damit I^d eindeutig lösbar.

Wir wenden diesen Satz auf die allgemeine Hermite-Interpolation $\mathcal{I}(AH^d)$ an und erhalten

Hauptsatz 3.10

Bei jedem der Probleme $\mathcal{I}_i(AH)$ sei $Y_i \in H_{m_i}^{r_i}(a_i, b_i)$. Dann ist das Problem $\mathcal{I}(AH^d)$ eindeutig lösbar.

Beweis:

Nach Satz 3.8 ist das Problem $\mathcal{I}(AH^d)$ den d Interpolationsaufgaben $\mathcal{I}_i(AH)$ zugeordnet. Aufgrund von Satz 1.19 sind alle $\mathcal{I}_i(AH)$ eindeutig lösbar. Damit

liefert Hauptsatz 3.9 die Behauptung.

Im Anschluß an die allgemeine Theorie der Hermite-Interpolation wollen wir einige wichtige Spezialfälle des $\mathcal{I}(\mathcal{A}H^d)$ betrachten. Wir legen dazu an Stelle des allgemeinen Raumes $\mathcal{D}_M^R$ den speziellen Raum

$$\mathcal{K}_M = \{P \mid P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{j_1=0}^{m_1} \dots \sum_{j_d=0}^{m_d} a_{j_1 \dots j_d} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_d^{j_d} \\ \text{mit } a_{j_1 \dots j_d} \in \mathbb{R} \} \quad ,$$

kurz

$$(3.25) \quad \mathcal{K}_M = \{P \mid P(x) = \sum_{j=0}^M a_j x^j \text{ mit } a_j \in \mathbb{R} \} \quad ,$$

zugrunde. Aus Lemma 3.2 folgt:

$$(3.26) \quad \mathcal{K}_M = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{K}_{m_i} \quad .$$

$\mathcal{K}_{m_i}$ bezeichnet dabei den Raum der gewöhnlichen algebraischen Polynome in einer Veränderlichen x_i vom Grad $\leq m_i$.

Bekanntlich ist $\mathcal{K}_{m_i} \in H_{m_i}^{r_i}(a_i, b_i)$ für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $r_i \leq m_i$.

Zunächst betrachten wir die Lagrange-Interpolation in d Veränderlichen, die schon W. E. MILNE et al. [1958]

untersucht haben. Sie ist ein Spezialfall von Hauptsatz 3.10.

Satz 3.11

Ist $W \in \mathcal{R}_N$, so gibt es zu beliebigen reellen Zahlen a_J ($J = 0, \dots, N$) genau ein $P \in \mathcal{H}_N$ so, daß gilt:

$$(3.27) \quad P(X_J) = a_J \quad (J = 0, \dots, N) .$$

Dieser Satz besagt, daß die d-dimensionale Lagrange-Interpolation eindeutig lösbar ist.

Beweis:

Es ist $\mathcal{H}_{n_i} \in H_{n_i}^0(a_i, b_i)$. Für $U = 0$ ergibt sich aus (3.20) die Beziehung

$$(3.28) \quad L_{J_0}(P) = L_J(P) = P(X_J)$$

für $P \in \mathcal{H}_N$ und $J \in W$. Nach Lemma 3.6 gilt weiter

$$(3.29) \quad L_J = L_{J_d 0} \otimes \dots \otimes L_{J_d 0}$$

Also folgt mit (3.26): Das durch (3.27) gegebene Interpolationsproblem ist d eindimensionalen Lagrange-Interpolationsproblemen, die alle eindeutig lösbar sind, zugeordnet. Nach Hauptsatz 3.9 folgt die Behauptung.

Wir wenden uns jetzt der mehrdimensionalen (0-1)-Hermite-Interpolation zu. Der Einfachheit wegen bringen wir zunächst den Spezialfall für $d = 2$ und weisen anschließend auf den allgemeinen Fall hin.

Es sei $N \in \mathbb{N}_*^2$ und $W \in \mathcal{R}_N$. Aus $\mathcal{K}_{2N+1}^*$ wählen wir die linearen Funktionale L_{Jk} ($k = 1, \dots, 4$), die durch

$$\begin{aligned}
 L_{J1}(P) &= P(X_J), \\
 L_{J2}(P) &= \frac{\partial}{\partial x_1} P(X_J), \\
 L_{J3}(P) &= \frac{\partial}{\partial x_2} P(X_J), \\
 L_{J4}(P) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} P(X_J)
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

mit $J = 0, \dots, N$ gegeben sind. Es gilt

Satz 3.12

Es gibt genau ein $Q \in \mathcal{K}_{2N+1}$, das die Bedingungen (3.30) für $J = 0, \dots, N$ erfüllt. D.h. : Das 2-dimensionale (0-1)-Hermite-Interpolationsproblem $\mathcal{I}'(H^2)$ ist eindeutig lösbar.

Zum Beweis überlegen wir, daß das Problem $\mathcal{I}'(H^2)$ zwei (0-1)-Hermite-Interpolationsproblemen $\mathcal{I}'_1(H)$ und $\mathcal{I}'_2(H)$ zugeordnet ist.

Bemerkung 3.13

Für beliebiges $d \in \mathbb{N}$ ergeben sich an Stelle von (3.30) die komplizierteren Bedingungen

$$(3.31) \quad L_{JU}(P) = D^U P(X_J)$$

für $J \in W \in \mathcal{R}_N$ und $0 \leq U \leq 1$. Es werden damit an jedem Punkt von W die 2^d Werte

$$P; P_{x_1}, \dots, P_{x_d}; P_{x_1 x_2}, P_{x_1 x_3}, \dots, P_{x_{d-1} x_d}; \dots; P_{x_1 \dots x_d}$$

vorgeschrieben, d.h. alle gemischten partiellen Ableitungen, bei denen in x_i -Richtung höchstens einmal abgeleitet wurde. Hauptsatz 3.10 liefert die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für dieses Interpolationsproblem.

Bemerkung 3.14

Im Falle der Fejér-Interpolation $\mathcal{I}'(F^d)$ fordern wir

$$(3.32) \quad \begin{aligned} L_{Jo}(P) &= P(X_J) \\ L_{JU}(P) &= 0 \quad (\text{für } 0 \leq U \leq 1, U \neq 0) \end{aligned}$$

an allen Punkten $X_J \in W$. $\mathcal{I}'(F^d)$ ist mit $P \in \mathcal{H}_{2N+1}$ eindeutig lösbar.

Bemerkung 3.15

Satz 3.11 gilt auch für das Tensorprodukt von d Haar-Systemen. Ebenso gelten Satz 3.12, Bemerkung 3.13 und Bemerkung 3.14 für Tensorprodukte von beliebigen einmal differenzierbaren schwachen Haar-Systemen, jedoch müssen die Bedingungen aus Satz 1.14 erfüllt sein (vgl. Bemerkung 1.15).

Weitere Interpolationsprobleme:

Hauptsatz 3.9 gestattet es uns, auch andere als allgemeine Hermite-Interpolationsprobleme in mehreren Veränderlichen zu behandeln. Seit 1955 gingen J. SURANYI und P. TURAN [1955], R. B. SAXENA [1960] sowie R. B. SAXENA und A. SHARMA [1958] auf die sogenannte $(0,2)$ -, $(0,1,3)$ - und $(0,1,2,4)$ -Hermite-Interpolation ein, die sich nicht als Spezialfälle der bisher betrachteten allgemeinen Hermite-Interpolation ergeben. Wir skizzieren die Problemstellung der $(0,2)$ -Interpolation (vgl. J. SURANYI und P. TURAN [1955]) für die Veränderliche x_1 .

P_{n_i} sei das n_i -te Legendre-Polynom vom Grad n_i in $[-1,1]$ und $\Pi_{n_i}(x_1) := (1-x_1^2) P'_{n_i-1}(x_1)$. Die n_i+1 Nullstellen von Π_{n_i+1} bezeichnen wir mit

$$(3.33) \quad -1 = \xi_{in_i} < \xi_{in_i-1} < \dots < \xi_{i1} < \xi_{i0} = 1,$$

und es sei $W_i = \{\xi_{i0}, \dots, \xi_{in_i}\}$. Weiter definieren wir die linearen Funktionale

$$L_{1j_i}(P) = P(\xi_{1j_i}), \quad (3.34)$$

$$L_{2j_i}(P) = P'(\xi_{1j_i}) = \frac{d}{dx_i} P(\xi_{1j_i})$$

aus $\mathcal{R}_{2n_i+1}^*$ für $j_i = 0, \dots, n_i$. Mit diesen Vereinbarungen ergibt sich

Satz 3.16 (J. SURANYI und P. TURAN [1955])

Für $n_i = 2k_i + 1$ und beliebige reelle Zahlen a_{1j_i} und a_{2j_i} ($j_i = 0, \dots, n_i$) gibt es genau ein Polynom $Q \in \mathcal{R}_{2n_i+1}$ mit

$$(3.35) \quad L_{1j_i}(Q) = a_{1j_i}; \quad L_{2j_i}(Q) = a_{2j_i} \quad (j_i = 0, \dots, n_i).$$

Im Mehrdimensionalen sei wie bisher $W = \bigotimes_{i=1}^d W_i$. Dann definieren wir in $\mathcal{R}_{2N+1}^*$ die folgenden Elemente

$$(3.36) \quad \hat{L}_{AJ} = L_{a_1 j_1} \otimes \dots \otimes L_{a_d j_d}$$

mit $1 \leq A \leq 2$ und $0 \leq J \leq N$. Dabei seien die $L_{a_i j_i}$ gemäß (3.34) gewählt. Wir erhalten

Satz 3.17

Für $N = 2K + 1$ und $W = \bigotimes_{i=1}^d W_i \in \mathcal{R}_N$ gibt es zu beliebig

vorgegebenen reellen Zahlen β_{AJ} ($1 \leq A \leq 2$ und $0 \leq J \leq N$) genau ein $Q \in \mathcal{K}_{2N+1}$ so, daß

$$(3.37) \quad \hat{L}_{AJ}(Q) = \beta_{AJ} \quad (1 \leq A \leq 2, 0 \leq J \leq N)$$

erfüllt ist.

Zum Beweis überlegen wir uns, daß das vorliegende Problem d Problemen aus Satz 3.16 zugeordnet ist. Hauptsatz 3.9 beweist dann die Behauptung.

Bemerkung 3.18

Spezialisieren wir auf den Fall $d = 2$, dann gibt es nach Satz 3.17 stets ein eindeutig bestimmtes $Q \in \mathcal{K}_{2N+1}$, für das die partiellen Ableitungen

$$Q, Q_{x_1 x_1}, Q_{x_2 x_2}, Q_{x_1 x_2 x_2}$$

an allen Punkten eines 2-dimensionalen N -Rechteckgitters beliebig vorgeschriebene Werte annehmen.

§ 4 Hermite-Interpolation auf Fastrechteckgittern

Im Hinblick auf die Theorie der gleichmäßigen Approximation von Funktionen, die auf einem d-dimensionalen Rechteckgitter definiert sind, scheint das folgende Interpolationsproblem von Bedeutung zu sein:

Als Interpolationsknoten sei ein "Teilgitter" eines N -Rechteckgitters W zugrunde gelegt, das durch Weglassen eines einzigen (beliebig gewählten) Punktes aus W entsteht. Stellen wir, wie im Fall der Lagrange-Interpolation, an jedem Punkt dieses "Teilgitters" genau eine Interpolationsbedingung, so haben wir insgesamt eine Bedingung weniger als bei der Lagrange-Interpolation auf Rechteckgittern. Um eine eindeutige Lösung des Interpolationsproblems zu erhalten, werden wir solche Polynome $\tilde{P} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ verwenden, die einen Koeffizienten weniger besitzen als die Polynome $P \in \mathcal{K}_N$. Es liegt nahe, den Höchstkoeffizienten a_N wegzulassen.

W. E. MILNE et al. [1958] gehen in einem Beispiel auf die Lagrange-Interpolation in diesem Fall ein. Sie betrachten aber lediglich ein zweidimensionales Gitter mit $3 \cdot 3 - 1 = 8$ Punkten.

Wir werden uns nicht nur mit der Lagrange-Interpolation sondern auch mit der Hermite-Interpolation auf solchen "Teilgittern" befassen. Dabei wollen wir erreichen, daß beim Weglassen eines beliebigen Punktes aus dem Rechteckgitter W stets dieselbe Anzahl von Interpolationsbedingungen wegfällt. Wir verlangen daher für alle $I, J \in W$ die Beziehung

$$T(I) = T(J)$$

(vgl. Definition 3.5). Dies zieht die Bedingung $m_{ij} = m_{i0}$ ($j = 0, \dots, n_i$) für $1 \leq i \leq d$ nach sich. Wir werden also ein d -dimensionales Interpolationsproblem behandeln, das der $(O-p)$ -Hermite-Interpolation entspricht. Dieses werden wir mit $\tilde{J}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnen.

Zunächst definieren wir die für diese Art der Interpolation geeigneten Polynome.

Definition 4.1

Für $0 \leq R \leq M \in \mathbb{N}_*^d$ sei $\mathcal{K}_M^R$ der Polynomraum

$$\mathcal{K}_M^R = \{P \mid P \in \mathcal{K}_M \text{ mit } a_J = 0 \text{ für } M-R \leq J \leq M\}.$$

Die Menge $\mathcal{K}_M^0$ besteht demzufolge aus allen Polynomen $Q \in \mathcal{K}_M$ mit $a_M = 0$.

Die obigen Ausführungen über ein "Teilgitter" präzisieren wir nun in

Definition 4.2

Es sei $N \in \mathbb{N}_*^d$, $W = \bigotimes_{i=1}^d \{x_{i_0}, \dots, x_{i_{n_i}}\} \in \mathcal{R}_N$ und $K \in W$. Dann verstehen wir unter einem d-dimensionalen N-Fastrechteckgitter die Menge

$$(4.1) \quad W(K) = W - \{X_K\} = W - \{K\}.$$

Die Menge aller d-dimensionalen N-Fastrechteckgitter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_N$.

Nach Bemerkung 3.4 können wir $W \in \mathcal{R}_N$ in der Form

$$W = \{J \mid J \in \mathbb{N}_*^d, 0 \leq J \leq N\}$$

darstellen. Entsprechend gilt für die Darstellung von $W(K) \in \mathcal{F}_N$:

$$(4.2) \quad W(K) = \{J \mid J \in \mathbb{N}_*^d, 0 \leq J \leq N, J \neq K\}.$$

Wir beweisen jetzt einen Satz über die eindeutige Lösbarkeit des d-dimensionalen Hermite-Interpolationsproblems $\tilde{\mathcal{I}}(\mathbb{R}H^d)$.

Satz 4.3

Es seien $N, R \in \mathbb{N}_*^d$, $W(K) \in \mathcal{F}_N$ und die linearen

Funktionale $L_{JU} \in \mathcal{K}_S^{R*}$ für $S = (N + 1)(R + 1) - 1$,
 $0 \leq J \leq N$, $J \neq K$ und $0 \leq U \leq R$ durch

$$(4.3) \quad L_{JU}(P) = D_P^U(X_J)$$

definiert. Dann gibt es zu beliebig vorgeschriebenen
 $a_{JU} \in \mathbb{R}$ genau ein $Q \in \mathcal{K}_S^R$ so, daß gilt

$$(4.4) \quad L_{JU}(Q) = a_{JU} \text{ für } 0 \leq J \leq N, J \neq K \text{ und } 0 \leq U \leq R.$$

Der Beweis ergibt sich mit Bemerkung 1.4 direkt aus dem folgenden Satz 4.4. Wir führen zu dessen Beweis noch einige Bezeichnungen ein: Es seien M' und W' das $(d-1)$ -tupel bzw. $(d-1)$ -dimensionale Rechteckgitter, das durch Weglassen der ersten Koordinate bzw. Koordinatenrichtung aus M bzw. W entsteht. Es ist also

$$M' = (m_2, \dots, m_d) \text{ für } M = (m_1, \dots, m_d)$$

und

$$W' = \bigotimes_{i=2}^d \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\} \quad \text{für } W = \bigotimes_{i=1}^d \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\}.$$

Wir beweisen nun

Satz 4.4

Mit $N, R \in \mathbb{N}_*^d$, $S = (N + 1)(R + 1) - 1$, $P \in \mathcal{K}_S^R$ und $W(K) \in \mathcal{T}_N$ gilt:

Falls D_P^U auf $W(K) \subset \mathbb{R}^d$ für $0 \leq U \leq R$ verschwindet,

so ist $P \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis:

Wir führen den Beweis durch Induktion nach d . Dabei gehen wir vom Eindimensionalen aus.

I. Es sei $d = 1$. Da $P \in \mathcal{K}_{s_1}^{r_1}$ ist, gilt:

$$(4.5) \quad a_{s_1} = a_{s_1-1} = \dots = a_{s_1-r_1} = 0.$$

Also besitzt P die Darstellung

$$(4.6) \quad P(x_1) = \sum_{i_1=0}^{s_1-r_1-1} a_{i_1} x_1^{i_1}.$$

Nach Voraussetzung sind $P, P', \dots, P^{(r_1)}$ auf den Punkten von $W(K) = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1k_1-1}, x_{1k_1+1}, \dots, x_{1n_1}\}$ gleich Null. P besitzt daher die n_1 genau (r_1+1) -fachen Nullstellen $x_{10}, \dots, x_{1k_1-1}, x_{1k_1+1}, \dots, x_{1n_1}$. Zählen wir die Vielfachheit der Nullstellen (die ja für Polynome aus $\mathcal{K}_{s_1}^{r_1} \subset C^\infty(a_1, b_1)$ definiert ist), so erhalten wir $n_1(r_1+1) = s_1 - r_1$ Nullstellen; also verschwindet P identisch auf $\mathbb{R}^1$.

II. Die Behauptung sei schon für $d-1 \geq 1$ bewiesen. Wir zeigen: Dann gilt sie auch für d .

Für $0 \leq U' \leq R' \in \mathbb{N}_*^{d-1}$ gilt

$$(4.7) \quad D^{U'} P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=0}^{s_1} D^{U'} A^{(i)}(x_2, \dots, x_d) \cdot x_1^i,$$

mit $D^{U'} A^{(i)} \in \mathcal{H}_{S'}$, ($i = 0, \dots, s_1$) und dem Differentialoperator $D^{U'} = \frac{\partial^{\sum_{i=1}^d u_i}}{\partial x_1^{u_1} \dots \partial x_d^{u_d}}.$

Nach Voraussetzung verschwindet $D^{U'} P(x_1, x_{2j_2}, \dots, x_{dj_d})$ für $0 \leq J' \leq N'$, $J' \neq K'$ und $0 \leq U' \leq R'$ an den $n_1 + 1$ Stellen $x_{10}, \dots, x_{1n_1}$. Dasselbe gilt für die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D^{U'} P, \dots, \frac{\partial^{r_1}}{\partial x_1^{r_1}} D^{U'} P.$$

Also hat $D^{U'} P(x_1, x_{2j_2}, \dots, x_{dj_d})$ für jedes J' mit $0 \leq J' \leq N'$, $J' \neq K'$ mindestens $(n_1 + 1)(r_1 + 1) = s_1 + 1$ Nullstellen, verschwindet also identisch. Also müssen auch seine Koeffizienten sämtlich verschwinden. Nach (4.7) gilt damit

$$(4.8) \quad D^{U'} A^{(i)}(x_{2j_2}, \dots, x_{dj_d}) = 0$$

für $0 \leq J' \leq N'$, $J' \neq K'$, $i = 0, \dots, s_1$ und alle U' mit $0 \leq U' \leq R'$.

Wir betrachten jetzt $A^{(s_1)}, \dots, A^{(s_1 - r_1)}$ als Polynome in den Veränderlichen $x_2, \dots, x_d$ und zeigen: Es gilt sogar

$$(4.9) \quad A^{(s_1 - \vartheta)} \in \mathcal{K}_{S'}^{R'} \quad \text{für } \vartheta = 0, \dots, r_1.$$

Denn es ist

$$(4.10) \quad A^{(s_1 - \vartheta)}(x_2, \dots, x_d) = \sum_{I'=0}^{S'} a_{s_1 - \vartheta, i_2 \dots i_d} x_2^{i_2} \dots x_d^{i_d}.$$

Wegen $a_J = 0$ für $S - R \leq J \leq S$ folgt unmittelbar,

daß $a_{s_1 - \vartheta, I'} = 0$ ist für $S' - R' \leq I' \leq S'$ und
 $0 \leq \vartheta \leq r_1$, d.h. es gilt $A^{(s_1 - \vartheta)} \in \mathcal{K}_{S'}^{R'}$ für $0 \leq \vartheta \leq r_1$.

Wir zeigen weiter: Die $D^{U'} A^{(s_1 - \vartheta)}$ erfüllen die Bedingungen der Induktionsvoraussetzung (für $d-1$ statt d !) für $\vartheta = 0, \dots, r_1$:

Es ist $R', N' \in \mathbb{N}_*^{d-1}$, $S' = (R' + 1)(N' + 1) - 1$, $W'(K') \in \mathcal{T}_{N'}$ und $A^{(s_1 - \vartheta)} \in \mathcal{K}_{S'}^{R'}$ (für $\vartheta = 0, \dots, r_1$). Nach (4.8) ist $D^{U'} A^{(s_1 - \vartheta)} = 0$ auf $W'(K')$ für $0 \leq U' \leq R'$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung: $A^{(s_1 - \vartheta)} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^{d-1}$ für $\vartheta = 0, \dots, r_1$.

P hat also folgende Darstellung:

$$(4.11) \quad P(x_1, \dots, x_d) = \sum_{I'=0}^{s_1 - r_1 - 1} \sum_{I'=0}^{S'} a_I x^I.$$

Es sei $\bar{S} = S - (r_1 + 1, 0, \dots, 0)$. Damit gilt, daß $P \in \mathcal{K}_{\bar{S}}$ ist. Wir betrachten P auf $\bar{W}$ mit

$$\bar{W} = \{x_{10}, \dots, x_{1K_1-1}, x_{1K_1+1}, \dots, x_{1N_1}\} \times W'.$$

Nach Voraussetzung verschwindet P auf $\bar{W}$, da $\bar{W} \subset W$ und $K \not\subset \bar{W}$. Wir haben jetzt ein Interpolationsproblem der Art $\mathcal{I}'(AH^d)$ vorliegen, das nach Satz 3.10 eindeutig lösbar ist. Also ist $P \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d$.

Wir weisen noch auf einen wichtigen Spezialfall von Satz 4.3 hin:

Bemerkung 4.5

Für $N \in \mathbb{N}_*^d$ und $W(K) \in \mathcal{F}_N$ gibt es zu beliebigen reellen Zahlen a_J ($0 \leq J \leq N$, $J \neq K$) genau ein $Q \in \mathcal{K}_N^0$ so, daß gilt:

$$(4.12) \quad Q(X_J) = a_J \quad (0 \leq J \leq N; J \neq K) \quad .$$

D.h., daß die d -dimensionale Lagrange-Interpolation auf einem N -Fastrechteckgitter eindeutig möglich ist.

Der Beweis ergibt sich aus Satz 4.3 für $R = 0$.

Kapitel II Darstellung und Konvergenz von Inter-

polationsoperatoren in mehreren

Veränderlichen

§ 5 Darstellung von Interpolationspolynomen

Gegeben sei ein eindeutig lösbares Interpolationsproblem vom Typ (1.1). Die Aufgabe der Darstellung der Lösung dieses Problems besteht darin, eine Basis $\{y_0, \dots, y_n\}$ von Y so anzugeben, daß für diese Lösung $y \in Y$ gilt:

$$(5.1) \quad y = \sum_{j=0}^n a_j y_j \quad .$$

Wenden wir hierauf das lineare Funktional φ_k ($k \in \{0, \dots, n\}$) an, so folgt nach (1.1)

$$(5.2) \quad \varphi_k(y) = a_k \quad (k \in \{0, \dots, n\}) \quad .$$

Daraus erkennen wir, daß $\varphi_k(y_j) = \delta_{jk}$ für $j, k=0, \dots, n$ gelten muß. Hieraus ergibt sich sofort

Satz 5.1 (P. J. DAVIS [1965])

Es sei Y ein $(n+1)$ -dimensionaler linearer Raum über $\mathbb{R}$ und $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ eine Basis von Y^* . Dann löst genau

die Dualbasis $\{y_0, \dots, y_n\}$ der Basis $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ das Darstellungsproblem.

Wir nennen die y_j ($j = 0, \dots, n$) Grundelemente des gegebenen Interpolationsproblems, manchmal auch Grundpolynome (etwa bei der Lagrange- und Hermite-Interpolation).

Zur Anwendung auf die Darstellung der Lösung eines Interpolationsproblems in mehreren Veränderlichen beweisen wir ein Lemma über Dualbasen bei Tensorprodukten:

Lemma 5.2

Für $N \in \mathbb{N}_*^d$ seien die d (n_i+1) -dimensionalen linearen Räume E_i über $\mathbb{R}$ gegeben. Die $B_i^* = \{\varphi_{i0}, \dots, \varphi_{in_i}\}$ seien Basen der E_i^* ($1 \leq i \leq d$).

Ist dann $B_i = \{y_{i0}, \dots, y_{in_i}\}$ die Dualbasis von B_i^* , so gilt:

Die Basis $B^* = \{\varphi_{1j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{dj_d} \mid 0 \leq j \leq N\}$ von

$(\bigotimes_{i=1}^d E_i)^*$ besitzt die Dualbasis

$B = \{y_{1k_1} \otimes \dots \otimes y_{dk_d} \mid 0 \leq k \leq N\}$ von $\bigotimes_{i=1}^d E_i$.

Beweis:

Mit Hilfe von (2.1) berechnen wir

$$(\varphi_{1j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{dj_d}) (y_{1k_1} \otimes \dots \otimes y_{dk_d}) =$$

$$\prod_{i=1}^d \varphi_{ij_i} (y_{ik_i}) = \prod_{i=1}^d \delta_{j_i k_i} = : \delta_{JI}$$

unter Verwendung des Kronecker-Symbols für d-tupel.
Mit Satz 2.3 erhalten wir, daß B^* und B duale Basen sind.

Dieses Lemma gestattet es uns, die Darstellung eines (eindeutig lösbaren) Interpolationsproblems, das d anderen zugeordnet ist, leicht anzugeben, wenn wir die Darstellungen der Lösungen der zugrunde gelegten Interpolationsprobleme kennen.

Wir wollen dies für die Darstellungen der Lagrange-Interpolation $\mathcal{I}'(L^d)$ und der (0-1)-Hermite-Interpolation $\mathcal{I}'(H^d)$ ausnutzen. Die allgemeine Hermite-Interpolation können wir grundsätzlich nach derselben Methode behandeln, jedoch verzichten wir darauf, da wir deren Darstellung nicht zu Konvergenzuntersuchungen benötigen. In einer Veränderlichen findet sich die Darstellungsformel für die Lösung des $\mathcal{I}'(AH)$ bei M. MÜLLER [1955].

Zunächst führen wir einige Ergebnisse über die Darstellung von Interpolationspolynomen in einer Veränderlichen an und folgen dabei I. P. NATANSON [1964/5].

Diese Ergebnisse formulieren wir für die Veränderliche x_i ($1 \leq i \leq d$), um nachher beim d -dimensionalen Fall darauf zurückgreifen zu können.

Es sei $N \in \mathbb{N}_*^d$, $W_i = \{x_{i0}, \dots, x_{in_i}\} \in \mathcal{R}_{n_i}$ und $\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{in_i} \in \mathbb{R}$. Nach Satz 1.19 gibt es genau ein $P \in \mathcal{K}_{n_i}$ mit

$$(5.3) \quad L_{j_i}(P) = P(x_{ij_i}) = \alpha_{ij_i} \quad (0 \leq j_i \leq n_i).$$

Hierbei ist $L_{j_i} = L_{j_i 0}$ aus (3.17). Für $x_{ij_i} \in W_i$ setzen wir

$$(5.4) \quad \omega_{n_i}(x_i) = \prod_{j_i=0}^{n_i} (x_i - x_{ij_i})$$

und

$$(5.5) \quad l_{j_i}^{(n_i)}(x_i) = \frac{\omega_{n_i}(x_i)}{\omega_{n_i}(x_{ij_i})(x_i - x_{ij_i})}.$$

Außerdem schreiben wir l_{j_i} statt $l_{j_i}^{(n_i)}$, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Wie sich leicht bestätigen läßt, gilt

$$(5.6) \quad L_{k_i}(l_{j_i}) = l_{j_i}(x_{ik_i}) = \delta_{j_i k_i} \quad (0 \leq j_i, k_i \leq n_i).$$

Es folgt, daß $l_0, \dots, l_{n_i}$ die Dualbasis von $L_0, \dots, L_{n_i}$ ist, d.h. P besitzt die Darstellung

$$(5.7) \quad P(x_1) = \sum_{j_i=0}^{n_i} \alpha_{ij_i} l_{j_i}(x_1) .$$

Mit Hilfe von Lemma 5.2 gewinnen wir die Darstellungsformel für die d-dimensionale Lagrange-Interpolation

$\mathcal{T}'(L^d)$ auf einem Rechteckgitter W :

Die bei $\mathcal{T}'(L^d)$ verwendeten Interpolationsfunktionale sind nach Lemma 3.6 durch

$$(5.8) \quad L_J := L_{J_0} = L_{j_1} \otimes \dots \otimes L_{j_d}$$

gegeben. Damit erhalten wir als Dualbasis zu

$B_L^* = \{L_J \mid 0 \leq J \leq N\}$ die Basis

$$B_L = \{l_{j_1} \otimes \dots \otimes l_{j_d} \mid 0 \leq J \leq N\}.$$

Nach der Definition des Tensorproduktes von d Elementen aus $\mathcal{K}_{n_1}, \dots, \mathcal{K}_{n_d}$ in (3.12) gilt

$$(5.9) \quad B_L = \{\wedge_J^{(N)} := \wedge_J := \prod_{i=1}^d l_{j_i} \mid 0 \leq J \leq N\}.$$

Somit ergibt sich die Darstellungsformel für das

Lagrange-Interpolationspolynom Q , das bei

$X_J \in W = \prod_{i=1}^d W_i$ den Wert a_J annimmt, durch

$$(5.10) \quad Q(X) = \sum_{J=0}^N a_J \wedge_J(X) .$$

Für $d = 2$ finden wir diese Formel bei W.E. MILNE et al. [1958].

Zur Darstellung des (0-1)-Hermite-Interpolationspolynoms definieren wir (wieder für x_i) :

$$(5.11) \quad v_{k_i}^{(n_i)}(x_i) = 1 - \frac{\omega_{n_i}'(x_{ik_i})}{\omega_{n_i}(x_{ik_i})} (x_i - x_{ik_i}) ,$$

$$(5.12) \quad h_{k_i}^{o(n_i)}(x_i) = v_{k_i}^{(n_i)}(x_i) [l_{k_i}(x_i)]^2$$

und

$$(5.13) \quad h_{k_i}^{1(n_i)}(x_i) = (x_i - x_{ik_i}) [l_{k_i}(x_i)]^2 .$$

Nach Möglichkeit lassen wir auch hier den oberen Index n_i weg. Mit den Funktionalen $L_{j_i} u_i$ aus (3.17) gilt für $0 \leq j_i \leq n_i$, $u_i = 0, 1$:

$$L_{j_i} u_i (h_{k_i}^{v_i}) = \frac{\partial^{u_i}}{\partial x_i^{u_i}} h_{k_i}^{v_i}(x_{ij_i}) = \delta_{u_i v_i} \cdot \delta_{k_i j_i} .$$

$\frac{\partial^0}{\partial x_i^0}$ bedeutet "nullmalige Ableitung". Nach Lemma 5.2 erhalten wir zu

$$B_G^* = \{ L_{JU} \mid 0 \leq J \leq N, 0 \leq U \leq 1 \}$$

die folgende Dualbasis

$$(5.14) \quad B_G = \{ H_J^{UN} : = H_J^U = \prod_{i=1}^d h_{j_i}^{u_i} \mid 0 \leq J \leq N, 0 \leq U \leq 1 \} .$$

Für das (0-1)-Hermite-Interpolationspolynom R , dessen

Ableitungen $D^U R$ an den Stellen $X_J \in W$ die Werte $a_{JU} \in \mathbb{R}$ annehmen ($0 \leq J \leq N$, $0 \leq U \leq 1$), ergibt sich somit die Darstellung

$$(5.15) \quad R(X) = \sum_{U=0}^1 \sum_{J=0}^N H_J^U(X) \cdot a_{JU} \quad .$$

Im Falle der Fejér-Interpolation ist $a_{JU} = 0$, falls $U \neq 0$. Damit reduziert sich (5.15) zu

$$(5.16) \quad F(X) = \sum_{J=0}^N H_J^0(X) \cdot a_{J0} \quad .$$

Für den Spezialfall, daß die Interpolationsknoten

$W = \bigtimes_{i=1}^d W_i$ in jeder Komponente aus den Nullstellen der Čebyšev-Polynome bestehen, findet sich diese Darstellung des Fejér-Interpolationspolynoms bei B. MOND und O. SHISHA [1966a]. Diese Autoren beweisen aber nicht die Eindeutigkeit der Fejér-Interpolation, die sich hier aus Hauptsatz 3.10 ergibt.

Nun behandeln wir die Darstellung des Lagrange-Interpolationspolynoms auf einem Fastrechteckgitter.

Es sei $N \in \mathbb{N}_*^d$ und $W(K) \in \mathcal{F}_N$. Gesucht sind linear unabhängige Polynome $V_J \in \mathcal{H}_N^0$ ($0 \leq J \leq N$, $J \neq K$), für die gilt:

$$(5.17) \quad L_I(V_J) = V_J(X_I) = \delta_{IJ}$$

($I, J \in W(K)$ und $L_I = L_{I_0}$ aus (4.3)).

Wir gehen von den Polynomen Λ_J , die die Grundpolynome der d-dimensionalen Lagrange-Interpolation auf N-Rechteckgittern sind, aus. Der Höchstkoeffizient von Λ_J , d.h. der Koeffizient von $X^N = x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_d^{n_d}$ ist

$$HK(\Lambda_J) = \prod_{i=1}^d \frac{1}{\omega_{n_i}(x_{1j_i})} = : \frac{1}{\Omega_N'(X_J)} = : \frac{1}{\Omega_N'(J)}$$

für $J = 0, \dots, N$. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 5.3

Die Grundpolynome V_J aus (5.17) sind eindeutig bestimmt und lassen sich in der Form

$$(5.18) \quad V_J = \Lambda_J - \frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \cdot \Lambda_K$$

darstellen.

Beweis:

I : Wir zeigen, daß die in (5.18) festgelegten Polynome aus $\mathcal{K}_N^0$ sind. Dazu berechnen wir

$$HK(V_J) = HK(\Lambda_J - \frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \cdot \Lambda_K)$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{HK} (\Lambda_J) - \text{HK} \left(\frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \cdot \Lambda_K \right) \\
 &= \frac{1}{\Omega_N'(J)} - \frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \cdot \frac{1}{\Omega_N'(K)} = 0.
 \end{aligned}$$

II. Die lineare Unabhängigkeit der Funktionen V_J ($0 \leq J \leq N$, $J \neq K$) folgt daraus, daß die Λ_J für $0 \leq J \leq N$ linear unabhängig sind und daher aus

$$0 = \sum_{J=0}^N \alpha_J V_J = \sum_{J=0}^N \alpha_J \Lambda_J - \Lambda_K \cdot \left(\sum_{J=0}^N \alpha_J \frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \right)$$

stets $\alpha_J = 0$ folgt.

III. Wir weisen nach, daß für $I, J \in W(K)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (5.19) \quad L_I(V_J) &= V_J(X_I) = \Lambda_J(X_I) - \frac{\Omega_N'(K)}{\Omega_N'(J)} \cdot \Lambda_K(X_I) \\
 &= \delta_{IJ} - 0 = \delta_{IJ}.
 \end{aligned}$$

IV. Die Eindeutigkeit folgt mit Hilfe der Bemerkung 4.5 aus den in (5.19) gestellten Interpolationsbedingungen.

Damit haben wir die Darstellung für das Lagrange-Interpolationspolynom, das auf den Punkten $X_J \in W(K)$ die Werte $a_J \in \mathbb{R}$ annimmt:

$$(5.20) \quad P(X) = \sum_{j=0}^N a_j V_j(X) \quad .$$

Beachten wir noch die Beziehung

$$V_K(X) = \Lambda_K(X) - \frac{\Omega'_N(K)}{\Omega_N(K)} \Lambda_K(X) \equiv 0 \quad ,$$

so folgt mit beliebig vorschreibbarem $a_K \in \mathbb{R}$:

$$(5.20') \quad P(X) = \sum_{j=0}^N a_j V_j(X) \quad .$$

§ 6 Konvergenz von Fejér- und Hermite-Interpolation

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir bei den Untersuchungen über Konvergenz von Interpolationspolynomen in d Veränderlichen die Intervalle $[a_i, b_i]$ mit $a_i = -1$ und $b_i = 1$ für $1 \leq i \leq d$ zugrunde. Durch eine lineare Transformation können die Ergebnisse auf beliebige Intervalle übertragen werden.

Weiterhin sei stets $E = \prod_{i=1}^d [-1, 1]$.

Den N -ten d -dimensionalen verallgemeinerten Hermite-Operator G_N definieren wir wie folgt:

Es sei Z ein Teilraum von $C(E)$ und $W \in \mathcal{R}_N$. Der Operator

$$G_N : Z \longrightarrow C(E)$$

wird durch

$$(6.1) \quad G_N : f \longrightarrow G_N(f) = \sum_{u=0}^4 \sum_{j=0}^N H_J^U b_{JU}$$

definiert. Dabei gilt ($0 \leq J \leq N$):

$$b_{J0} = f(X_J)$$

und für $U \neq 0$

$$b_{JU} \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |b_{JU}| \leq \beta \quad .$$

Der spezielle Hermite-Operator H_N liegt vor, falls $Z = C^1(E)$ und $b_{JU} = D^U f(X_J)$ für $0 \leq U \leq 1$ und $0 \leq J \leq N$ ist.

Der N -te d -dimensionale Fejér-Operator F_N ergibt sich für $Z = C(E)$ und $b_{JU} = 0$ für $U \neq 0$, $0 \leq U \leq 1$ und $0 \leq J \leq N$. Gemäß (5.16) gilt:

$$(6.2) \quad F_N : f \longrightarrow F_N(f) = \sum_{j=0}^N f(X_J) H_J^0 \quad .$$

Bemerkung 6.1

H_N und F_N sind lineare Operatoren. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} H_N(f + g) &= \sum_{U=0}^1 \sum_{J=0}^N H_J^U \cdot D^U(f + g)(X_J) \\ &= \sum_{U=0}^1 \sum_{J=0}^N H_J^U \cdot D^U f(X_J) + \sum_{U=0}^1 \sum_{J=0}^N H_J^U \cdot D^U g(X_J) \\ &= H_N(f) + H_N(g) \end{aligned}$$

für $f, g \in C^1(E)$. Die Homogenität folgt ebenso einfach. Speziell ergibt sich die Linearität von F_N sogar auf $C(E)$.

G_N ist im allgemeinen nicht linear. G_N kann aber in der Form $G_N = F_N + R_N$ aufgespalten werden. R_N ist dabei ein "Restoperator".

Eine wichtige Eigenschaft des (eindimensionalen) Fejér-Operators ist die Monotonie bei geeigneten Interpolationsknoten.

Ein linearer Operator $A : Z \subset C(E) \longrightarrow C(E)$ heißt monoton (oder auch positiv), wenn gilt:

(6.3) Für $f, g \in Z$ und $f(X) \leq g(X)$ für alle $X \in E$

folgt:

(6.4) $[A(f)](X) \leq [A(g)](X)$ für alle $X \in E$.

Über monotone lineare Operatoren beweisen wir eine Verallgemeinerung eines Satzes von P. P. KOROVKIN [1960] (siehe auch G. MEINARDUS [1964]).

Lemma 6.2

Gegeben seien die folgenden Funktionen $g_i^{(k)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 g_i^{(0)} &: X \longrightarrow 1 \\
 (6.5) \quad g_i^{(1)} &: X \longrightarrow x_i \quad (1 \leq i \leq d) \\
 g_i^{(2)} &: X \longrightarrow x_i^2
 \end{aligned}$$

und ein Teilraum Z von $C(E)$ mit $g_i^{(k)} \in Z$ für $1 \leq i \leq d$ und $0 \leq k \leq 2$. $F_m : Z \longrightarrow C(E)$ sei eine Folge von linearen monotonen Operatoren. Gilt dann mit der

Supremums-Norm

$$(6.6) \quad \|f\| = \sup_{X \in E} |f(X)|$$

die Beziehung

$$(6.7) \quad \|F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

für alle Funktionen $g_i^{(k)}$ aus (6.5), so ist für $f \in Z$

$$(6.8) \quad \|F_m(f) - f\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

Beweis:

Da $Z \subset C(E)$ ist, folgt mit der Kompaktheit von E :

f ist gleichmäßig stetig. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß für beliebiges $X \in E$ gilt:

$$(6.9) \quad -\frac{\varepsilon}{2} < f(T) - f(X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $T \in E$ und $|T - X| < \delta$ (mit dem üblichen Abstand im $\mathbb{R}^d$). Für

$$|T - X| = \sqrt{\sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2} \geq \delta$$

folgt andererseits

$$\frac{|f(T) - f(X)|}{\sqrt{\sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2}} \leq \frac{2\|f\|}{\delta^2}$$

Also ist

$$(6.10) \quad -\frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2 \leq f(T) - f(X) \leq \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2.$$

Aus (6.9) und (6.10) erhalten wir für alle Werte

$T = X$ (mit $T \in E$):

$$(6.11) \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2 \leq f(T) - f(X) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d (t_i - x_i)^2.$$

Wenden wir auf (6.11) den monotonen linearen Operator

F_m an und gehen zum Betrag über, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| [F_m(f)](X) - f(X) \cdot [F_m(1)](X) \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \left| [F_m(1)](X) \right| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \cdot \sum_{i=1}^d \left| [F_m((t_i - x_i)^2)](X) \right| \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \|F_m(f) - f \cdot F_m(1)\| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|F_m(1)\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d \|F_m((t_i - x_i)^2)\|. \end{aligned}$$

Für $\|F_m(f) - f\|$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (6.12) \quad & \|F_m(f) - f\| \leq \|F_m(f) - f \cdot F_m(1)\| + \|f \cdot F_m(1) - f\| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \|F_m(1)\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d \|F_m((t_i - x_i)^2)\| + \|f\| \cdot \|1 - F_m(1)\| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|f\|\right) \|F_m(1) - 1\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \sum_{i=1}^d \|F_m((t_i - x_i)^2)\|. \end{aligned}$$

Jetzt untersuchen wir

$$\begin{aligned} & [F_m((t_i - x_i)^2)](X) = \\ &= [F_m(t_i^2)](X) + [F_m(x_i^2)](X) - 2[F_m(t_i x_i)](X) \\ &= [F_m(t_i^2)](X) - x_i^2 + [F_m(x_i^2)](X) - x_i^2 - 2([F_m(t_i x_i)](X) - x_i^2) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} & \|F_m((t_i - x_i)^2)\| \leq \\ &= \|F_m(t_i^2) - x_i^2\| + \|x_i^2\| \cdot \|F_m(1) - 1\| + 2\|x_i\| \cdot \|F_m(t_i) - x_i\| . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Voraussetzung (6.7) für die Funktionen aus (6.5) folgt

$$\begin{aligned} (6.13) \quad & \|F_m((t_i - x_i)^2)\| = o(1) + \|x_i^2\| \cdot o(1) + 2\|x_i\| \cdot o(1) \\ &= o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da $\|x_i^2\| \leq \|x_i\| \leq 1$. Diese Überlegungen gelten für $i = 1, \dots, d$. Also erhalten wir aus (6.12) und (6.13):

$$\begin{aligned} & \|F_m(f) - f\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|f\|\right) o(1) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} o(1) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m_0 so, daß für $m \geq m_0$ gilt

$$\|F_m(f) - f\| \leq \varepsilon .$$

Korollar 6.3

Gegeben seien die Funktionen $g_i^{(k)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ aus (6.5) und ein Teilraum Z von $C(E)$ mit $g_i^{(k)} \in Z$ für $1 \leq i \leq d$ und $0 \leq k \leq 2$. $H_m : Z \rightarrow C(E)$ sei eine Folge von Operatoren mit der Darstellung

$$H_m(f) = F_m(f) + R_m(f) ,$$

wobei F_m ein linearer monotoner und R_m ein "Restoperator" ist. Gilt dann

$$(a) \quad \|R_m(f)\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty \text{ und alle } f \in Z,$$

$$(b) \quad \|F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty \text{ und} \\ \text{alle Funktionen } g_i^{(k)} \text{ aus (6.5),}$$

so gilt für jedes $f \in Z$:

$$(6.14) \quad \|H_m(f) - f\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty .$$

Zum Beweis beachten wir, daß

$$\begin{aligned} \|H_m(f) - f\| &= \|F_m(f) + R_m(f) - f\| \\ &\leq \|F_m(f) - f\| + \|R_m(f)\| \end{aligned}$$

ist. Der erste Summand wird nach Lemma 6.2, der zweite nach Voraussetzung (a) abgeschätzt.

Wir wollen nun Lemma 6.2 und Korollar 6.3 auf die Konvergenz von Interpolationsoperatoren in mehreren Veränderlichen anwenden. Um monotone Operatoren zu erhalten, benötigen wir passende Interpolationsknoten. In einer Veränderlichen erweisen sich hier die $\mathfrak{g}$ -normalen Knotenmatrizen als nützlich.

Wir verallgemeinern den Begriff der Knotenmatrix (vgl. I. P. NATANSON [1964/5]) zum Begriff der Gitterfolge im $\mathbb{R}^d$.

Es seien die reellen Zahlen

$$(6.15) \quad \begin{array}{ccccccc} x_{i0}^{(0)} & & & & & & \\ x_{i0}^{(1)} & x_{i1}^{(1)} & & & & & \\ x_{i0}^{(2)} & x_{i1}^{(2)} & x_{i2}^{(2)} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ x_{i0}^{(n_i)} & x_{i1}^{(n_i)} & x_{i2}^{(n_i)} & \dots & x_{in_i}^{(n_i)} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

gegeben mit den Eigenschaften

$$(6.16a) \quad -1 \leq x_{ij_i}^{(n_i)} \leq 1 \quad (1 \leq i \leq d; n_i \in \mathbb{N}_*; 0 \leq j_i \leq n_i)$$

(6.16b) In jeder Zeile stehen lauter verschiedene Elemente.

Eine unendliche Dreiecksmatrix $\mathcal{M}_i$ der Form (6.15) mit (6.16a) und (6.16b) nennen wir eine Knotenmatrix. Die n_i -te Zeile von $\mathcal{M}_i$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{n_i}$.

Gegeben seien d Knotenmatrizen $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_d$ und eine Folge $(N_m)_{m \in \mathbb{N}_*}$ mit Elementen aus $\mathbb{N}_*^d$, die komponentenweise gegen ∞ divergiert. Es sei weiter

$$(6.17) \quad W_m := W_m(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_d; (N_m)_{m \in \mathbb{N}_*}) := \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{M}_{n_{i,m}}.$$

Wir bezeichnen dann $(W_m)_{m \in \mathbb{N}_*}$ als d -dimensionale Gitterfolge auf $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_d$.

Die Menge aller d -dimensionalen Gitterfolgen auf irgendwelchen Knotenmatrizen $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_d$ bezeichnen wir mit $\Gamma(d, N_m)$, kurz $\Gamma(N_m)$.

Für die Konvergenztheorie der Interpolation sind die ϑ -normalen Knotenmatrizen von Bedeutung (vgl.

I. P. NATANSON [1964/5]). Eine Knotenmatrix $\mathcal{M}_i$ heißt ϑ_i -normal ($\vartheta_i \geq 0$), wenn

$$(6.18) \quad v_{k_i}^{(n_i)}(x_i) \geq \vartheta_i \quad \text{für } x_i \in [-1, 1]$$

für $k_i = 0, \dots, n_i$ und alle $n_i \in \mathbb{N}_*$ gilt. Hierbei ist $v_{k_i}^{(n_i)}$ die in (5.11) definierte Funktion.

Eine Gitterfolge $(w_m)_{m \in \mathbb{N}_*} \in \Gamma(d, N_m)$ heißt P -normal, wenn für $P = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ jedes m_i φ_i -normal ist ($1 \leq i \leq d$). Die Menge aller P -normalen Gitterfolgen auf beliebigen φ_i -normalen Knotenmatrizen ($1 \leq i \leq d$) bezeichnen wir mit $\Gamma_P(d, N_m)$, kurz $\Gamma_P(N_m)$.

Bemerkung 6.4

Im Eindimensionalen sind die in den Anwendungen wichtigsten φ -normalen Knotenmatrizen m die, die mit den Nullstellen der Jacobi-Polynome $P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}$ gebildet werden ($-1 < \alpha, \beta \leq 0$). Dabei ist $\varphi = \min(-\alpha, -\beta)$.

Wir beweisen jetzt einen Satz über die Monotonie des d -dimensionalen Fejér-Operators.

Satz 6.5

Es sei $(w_m)_{m \in \mathbb{N}_*} \in \Gamma_P(N_m)$ und $0 \leq P \leq 1$. Der N_m -te Fejér-Operator $F_{N_m} = : F_m$ ist für diese Interpolationsknoten monoton.

Beweis:

Offenbar genügt es zu zeigen, daß für $f \geq 0$ auch $F_m(f) \geq 0$ ist. Nach (5.16) gilt mit $a_{j_0} = f(X_J)$:

$$\begin{aligned} [F_m(f)](X) &= \sum_{j=0}^{N_m} H_J^0(X) \cdot f(X_J) \\ &= \sum_{j=0}^{N_m} \prod_{i=1}^d v_{j_i}(x_i) (l_{j_i}(x_i))^2 \cdot f(X_J). \end{aligned}$$

Wegen der $\mathfrak{g}_i$ -Normalität von $\mathcal{M}_i$ für $1 \leq i \leq d$ folgt: $v_{j_i}(x_i) \geq 0$ in $[-1, 1]$ für $1 \leq i \leq d$. Also erhalten wir weiter: $H_J^0(X) \geq 0$ in $E = \bigtimes_{i=1}^d [-1, 1]$. Ist $f \geq 0$ auf E , so ist insbesondere $f(X_J) \geq 0$ und damit

$$[F_m(f)](X) = \sum_{j=0}^{N_m} H_J^0(X) \cdot f(X_J) \geq 0.$$

Zum Beweis einer Konvergenzaussage für die verallgemeinerte Hermite-Interpolation benötigen wir einen Hilfssatz von G. GRÜNWALD [1943]:

Hilfssatz 6.6

Für eine $\mathfrak{g}_i$ -normale Knotenmatrix $\mathcal{M}_i$ ($0 < \mathfrak{g}_i \leq 1$) gilt gleichmäßig in $[-1, 1]$:

$$(6.19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j_i=0}^{n_{im}} |x_i - x_{i,j_i}| \cdot (l_{j_i}^{(n_{im})}(x_i))^2 = 0$$

d.h.

$$\sum_{j_i=0}^{n_{im}} \|h_{j_i}^1\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Wir beweisen jetzt

Satz 6.7

Es sei $(W_m)_{m \in \mathbb{N}_*} \in \Gamma_P(N_m)$ mit $0 < P \leq 1$ und

$G_m := G_{N_m} : C(E) \longrightarrow C(E)$ der N_m -te verallgemeinerte

Hermite-Operator. Dann gilt für jedes $f \in C(E)$:

$$(6.20) \quad \|G_m(f) - f\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Betrachten wir nur den Fejér-Operator F_m statt G_m , so gilt dieselbe Aussage sogar für $0 \leq p \leq 1$.

Beweis:

Da $G_m = F_m + R_m$ ist, untersuchen wir zunächst das Verhalten von F_m .

(a) Nach Bemerkung 6.1 und Satz 6.5 ist F_m linear und monoton für $m \in \mathbb{N}_*$. Wir weisen nach, daß für alle Funktionen $g_i^{(k)}$ aus (6.5) die Beziehung

$$\|F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}\| = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

gilt. Dazu berechnen wir für

$$g_i^{(k)}(X) = x_i^k \quad (k = 0, 1, 2; i \in \{1, \dots, d\})$$

die Differenz

$$(6.21) \quad [F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}](X) = \sum_{j=0}^{N_m} H_j^0(X) \cdot x_{1j_i}^k - x_i^k.$$

Beachten wir die Identität

$$(6.22) \quad \sum_{j=0}^{N_m} v_{j_r}(x_r) \cdot (1_{j_r}(x_r))^2 \equiv 1$$

für jedes $1 \leq r \leq d$, so folgt aus (6.21)

$$[F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}](X) = \sum_{j_i=0}^{n_{im}} v_{j_i}(x_i) (l_{j_i}(x_i))^{2x_{ij_i}^k - x_i^k}.$$

Damit haben wir das Konvergenzproblem des Fejér-Operators in d Veränderlichen auf das in einer Veränderlichen zurückgeführt. Bekanntlich (vgl. etwa G. GRÜNWALD [1943]) konvergiert die Folge der Fejér-Interpolationspolynome für jedes $f \in C(-1,1)$ bei einer g_i -normalen Knotenmatrix $\mathcal{M}_i$ gleichmäßig in $[-1,1]$ gegen f (für $0 \leq g_i \leq 1$). Da dies nach Voraussetzung für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ erfüllt ist, folgt für alle $g_i^{(k)}$ aus (6.5)

$$(6.23) \quad \|F_m(g_i^{(k)}) - g_i^{(k)}\| = \sup_{x_i \in [-1,1]} \left| \sum_{j_i=0}^{n_{im}} v_{j_i}(x_i) (l_{j_i}(x_i))^{2x_{ij_i}^k - x_i^k} \right| \\ = o(1) \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

mit Lemma 6.2 also die Behauptung.

(b) Wir betrachten jetzt R_m und zeigen:

Für reelle Zahlen b_{JU} mit $|b_{JU}| \leq \beta$ und alle $0 \leq U \leq 1$, $U \neq (0, 0, \dots, 0)$, $0 \leq J \leq N_m$ gilt bei Benutzung der Interpolationsknoten $(w_m)_{m \in \mathbb{N}_*} \in \Gamma_p(N_m)$ mit $0 < p \leq 1$:

$$(6.24) \quad \|R_m(f)\| = \left\| \sum_{u=0}^A \sum_{j=0}^{N_m} H_J^U \cdot b_{JU} \right\| = o(1) \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Dabei bedeutet $\sum_{u=0}^1$, daß über alle $U \in \mathbb{N}_*^d$ mit $0 \leq U \leq 1$, aber nicht über $U = (0, \dots, 0)$ summiert werden soll.

Wir erhalten die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 | [R_m(f)](x) | &= \left| \sum_{U=0}^1 \sum_{j=0}^{N_m} H_j^U(x) \cdot b_{jU} \right| \\
 &\leq \sum_{U=0}^1 \sum_{j=0}^{N_m} |H_j^U(x)| \cdot |b_{jU}| \\
 &\leq \beta \cdot \sum_{U=0}^1 \sum_{j=0}^{N_m} |H_j^U(x)| = \beta \cdot \sum_{U=0}^1 \sum_{j=0}^{N_m} \prod_{i=1}^d |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| \\
 (6.25) \quad &= \beta \cdot \sum_{U=0}^1 \prod_{i=1}^d \sum_{j_i=0}^{n_{im}} |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| .
 \end{aligned}$$

Für $u_j = 0$ ($j \in \{1, \dots, d\}$) wenden wir (6.22) an. Also brauchen wir das Produkt aus (6.25) nur über solche $i \in \{1, \dots, d\}$ zu erstrecken, für die $u_i = 1$ ist. Wir deuten dies durch die Abkürzung $\prod_{i=1}^d$ an und erhalten im Anschluß an (6.25)

$$(6.26) \quad = \beta \sum_{U=0}^1 \prod_{i=1}^d \sum_{j_i=0}^{n_{im}} |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| ,$$

also

$$(6.27) \quad \|R_m(f)\| \leq \beta \sum_{U=0}^1 \prod_{i=1}^d \sum_{j_i=0}^{n_{im}} \|h_{j_i}^{u_i}\| .$$

Da die verwendete Gitterfolge P -normal ist ($0 < P \leq 1$),

können wir für jedes noch auftretende i in dem Produkt in (6.27) Hilfssatz 6.6 anwenden und erhalten:

$$(6.28) \quad \|R_m(f)\| \leq \beta \sum_{U=0}^1 \prod_{i=1}^d o(1) \quad \text{für } m \longrightarrow \infty,$$

da für jedes U mit $0 \leq U \leq 1$ und $U \neq (0, \dots, 0)$ ein $i \in \{1, \dots, d\}$ auftritt, für das $u_i = 1$ ist. Somit ist das Produkt in (6.28) nicht leer für jedes auftretende $U \neq (0, \dots, 0)$. Da die Summe in (6.28) nur endlich viele Summanden hat, folgt schließlich

$$\|R_m(f)\| = o(1) \quad \text{für } m \longrightarrow \infty,$$

und zwar für jedes $f \in C(E)$, da $R_m(f)$ nach Definition unabhängig von f ist.

Aus Beweisteil (a) und (b) folgt mit Korollar 6.3 die Behauptung. Die Zusatzbehauptung über den Fejér-Operator folgt schon aus Teil (a).

Es sei noch erwähnt, daß das Ergebnis (b) insbesondere auch für den speziellen Hermite-Operator

$H_m := H_{N_m} : C^1(E) \longrightarrow C(E)$ richtig ist, da alle auftretenden partiellen Ableitungen stetig, also insbesondere beschränkt sind, denn E ist kompakt.

Wir untersuchen jetzt die Konvergenzgüte der ver-

allgemeinerten Hermite-Interpolation. Grundsätzlich legen wir bei diesen Untersuchungen die Nullstellen der Čebyšev-Polynome als Interpolationsknoten zugrunde. Diese sind durch

$$(6.29) \quad x_j^{(n)} = \cos \frac{2j+1}{2n+2} \quad (j = 0, \dots, n)$$

gegeben. Da die Čebyšev-Polynome spezielle Jacobi-Polynome sind ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$), erhalten wir eine $\frac{1}{2}$ -normale Knotenmatrix. Wir setzen

$$(6.30) \quad \overline{m}_{n_i} = \{x_0^{(n_i)}, \dots, x_{n_i}^{(n_i)}\}.$$

Damit definieren wir das N-Rechteckgitter M_N von Čebyšev-Knoten

$$(6.31) \quad M_N = \bigtimes_{i=1}^d \overline{m}_{n_i}.$$

Wenn $n_1 = \dots = n_d = n$ ist, so schreiben wir M_N an Stelle von M_N .

Die Konvergenzgüte der verallgemeinerten Hermite-Interpolation untersuchen wir für Unterklassen von $C(E)$ und zwar für die Klasse $Lip \alpha$. Wir treffen die

Definition 6.8

Die Klasse $Lip \alpha$ besteht aus den Funktionen

$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, die folgender Bedingung genügen:

$$(6.32) \quad |f(X) - f(Y)| \leq \lambda |X - Y|^\alpha$$

mit $0 < \alpha \leq 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. MOND und O. SHISHA [1966a] bewiesen den folgenden Satz:

Satz 6.9

Es sei $f \in \text{Lip } 1$ und $M_m = M_{N_m}$ eine Folge von Čebyšev-Gittern (6.31) mit $N_m \rightarrow \infty$. Dann gilt für den zugehörigen Fejér-Operator $F_m := F_{N_m}$ in ganz E die Abschätzung

$$(6.33) \quad |f(X) - [F_m(f)](X)| < 4\lambda \sum_{i=1}^d \frac{\mu + \log n_{im}}{n_{im}}$$

mit $N_m = (n_{1m}, \dots, n_{dm})$ und geeignetem $\mu \in \mathbb{R}$.

B. MOND und O. SHISHA [1966b] stellen außerdem weitere Untersuchungen über die Konvergenzgüte von monotonen Operatoren an. Dies werden wir hier nicht weiter verfolgen, sondern uns dem verallgemeinerten Hermite-Operator zuwenden, der im allgemeinen nicht monoton ist. Dazu benutzen wir einige Ergebnisse über die Konvergenzgüte der Interpolation in einer Veränderlichen.

Satz 6.10 (V. G. AMELKOVIČ [1961])

Es sei F_n der n -te (eindimensionale) Fejér-Operator

für die Čebyšev-Knoten (6.29). Ferner sei

$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aus $\text{Lip } \alpha$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$(6.34) \quad \|f - F_n(f)\| = \begin{cases} O\left(\frac{\log n}{n}\right) & \text{für } \alpha = 1 \\ O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{cases}.$$

A. H. TUREZKII und G. N. TOROPOVA [1967] verschärfen dieses Ergebnis, indem sie $f - F_n(f)$ in Abhängigkeit von x abschätzen.

Ferner benötigen wir

Satz 6.11 (L. FEJER [1930])

Ist für ein Polynom P_n vom Grad $\leq 2n+1$ an den Čebyšev-Knoten $x_j^{(n)}$

$$(6.35) \quad |P_n(x_j^{(n)})| \leq \sigma, \quad |P_n'(x_j^{(n)})| \leq \tau,$$

so gilt in $[-1, 1]$

$$\|P_n\| \leq \sigma + \tau \cdot \lambda_n.$$

mit $0 < \lambda_n < \infty \cdot \frac{\log n}{n}$.

Für $\sigma = 0$ erhalten wir speziell ($n \rightarrow \infty$):

$$(6.36) \quad \|P_n\| = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse erhalten wir

Satz 6.12

Es sei G_n der n -te verallgemeinerte Hermite-Operator gemäß (6.1) mit $N = n = (n, n, \dots, n)$ unter Zugrundelegung der mehrdimensionalen Čebyšev-Knoten M_n nach (6.31). Für $f \in \text{Lip } \alpha$ gilt dann $(n \rightarrow \infty)$

$$(6.37) \quad \|G_n(f) - f\| = \begin{cases} O\left(\frac{\log n}{n}\right) & \text{für } \alpha = 1 \\ O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{cases}.$$

Beweis:

Wir zerlegen $G_n = F_n + R_n$ und führen die folgende Abkürzung ein:

Für $J \in \mathbb{N}_*^d$ und $i \in \{1, \dots, d\}$ verstehen wir unter J^i dasjenige Element aus $\mathbb{N}_*^{d-1}$, das aus J entsteht, wenn die i -te Komponente weggelassen wird.

(a) Nach Definition von F_n und (6.22) ist (man beachte $N = (n, n, \dots, n)$):

$$\begin{aligned} f(X) - [F_n(f)](X) &= f(X) - \sum_{j=0}^N H_j^0(X) \cdot f(X_j) \\ (6.38) &= \sum_{j=0}^N H_j^0(X) \cdot (f(X) - f(X_j)). \end{aligned}$$

Weiter ist $f(X) - f(X_j) =$

$$\sum_{s=1}^d f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{d_j s}) - f(x_1, \dots, x_{s_j s}, \dots, x_{d_j d}).$$

Setzen wir dies in (6.38) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(X) - [F_n(f)](X) &= \\
 \sum_{j=0}^N H_j^0(X) \sum_{s=1}^d (f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{dj_d}) - f(x_1, \dots, x_{sj_s}, \dots, x_{dj_d})) \\
 &= \sum_{s=1}^d \sum_{j=0}^N \prod_{i=1}^d v_{j_i}(x_i) \cdot (l_{j_i}(x_i))^2 \cdot \\
 &\quad \cdot [f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{dj_d}) - f(x_1, \dots, x_{sj_s}, \dots, x_{dj_d})] \\
 &= \sum_{s=1}^d \sum_{j=0}^{N^s} v_{j_i}(x_i) \cdot (l_{j_i}(x_i))^2 \cdot \sum_{j_s=0}^n v_{j_s}(x_s) \cdot (l_{j_s}(x_s))^2 \cdot \\
 &\quad \cdot [f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{dj_d}) - f(x_1, \dots, x_{sj_s}, \dots, x_{dj_d})] ,
 \end{aligned}$$

also nach (6.22)

$$\begin{aligned}
 f(X) - [F_n(f)](X) &= \sum_{s=1}^d \sum_{j_s=0}^n v_{j_s}(x_s) (l_{j_s}(x_s))^2 \cdot \\
 &\quad \cdot [f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{dj_d}) - f(x_1, \dots, x_{sj_s}, \dots, x_{dj_d})] .
 \end{aligned}$$

Da in jeder Koordinatenrichtung die Čebyšev-Knoten zugrunde gelegt werden, folgt aus Satz 6.10:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j_s=0}^n v_{j_s}(x_s) (l_{j_s}^2(x_s)) \cdot \right. \\
 & \quad \cdot [f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{dj_d}) - f(x_1, \dots, x_{sj_s}, \dots, x_{dj_d})] \left. \right|
 \end{aligned}$$

$$= |f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{d_j}) - \sum_{j_s=0}^n v_{j_s}(x_s) l_{j_s}^2(x_s) \cdot f(x_1, \dots, x_{s_j}, \dots, x_{d_j})|$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0 \left(\frac{\log n}{n} \right) & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{array} \right\} \quad (n \rightarrow \infty) .$$

Durch Summation über s folgt für $n \rightarrow \infty$

$$(6.39) \quad \|F_n(f) - f\| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \left(\frac{\log n}{n} \right) & \text{für } \alpha = 1 \\ 0 \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{array} \right\} .$$

(b) Nach Definition ist

$$R_n(f) = \sum_{u=0}^A \sum_{j=0}^N H_j^U \cdot b_{jU} .$$

Der Strich am Summenzeichen weist darauf hin, daß über den Nullvektor $U = 0$ nicht summiert wird. Da $U \neq 0$ ist, gibt es in jedem Summanden der Summe über U mindestens eine Koordinate $u_k = 1$. Mit den Vereinbarungen zu Beginn des Beweises folgt daher

$$| [R_n(f)](X) | = \left| \sum_{u=0}^A \sum_{j=0}^N H_j^U(X) \cdot b_{jU} \right|$$

$$\leq \sum_{u=0}^A \left| \sum_{j=0}^N H_j^U(X) \cdot b_{jU} \right|$$

$$= \sum_{u=0}^A \left| \sum_{j^k=0}^{N^k} H_{j^k}^{U^k}(X^k) \cdot \sum_{j_k=0}^n h_{j_k}^1(x_k) b_{jU} \right|$$

$$\leq \sum_{u=0}^A \sum_{j^k=0}^{N^k} |H_{j^k}^{U^k}(X^k)| \cdot \left| \sum_{j_k=0}^n h_{j_k}^1(x_k) \cdot b_{jU} \right| ,$$

mit $J^k, N^k \in \mathbb{N}_*^{d-1}$. $H_{J^k}^{U^k}$ hängt von X^k ab, d.h. von den $d-1$ Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d$. Das Polynom $Q_n(x_k) = \sum_{j_k=0}^n h_{j_k}^1 \circ b_{JU}$ ist für $0 \leq U^k \leq 1$ und $0 \leq J^k \leq N^k$ vom Grad $\leq 2n + 1$ in x_k , und es gilt für die Čebyšev-Knoten

$$Q_n(x_{kj_k}^{(n)}) = 0 ,$$

$$|Q_n'(x_{kj_k}^{(n)})| \leq \beta ,$$

da ja alle $|b_{JU}| \leq \beta$ sind. Daher folgt aus Satz 6.11

$$\|Q_n\| \leq \beta \cdot \omega \cdot \frac{\log n}{n} .$$

Damit erhalten wir

$$(6.40) \quad [R_n(f)](X) \leq \beta \cdot \omega \cdot \frac{\log n}{n} \sum_{u=0}^d \sum_{j^k=0}^{N^k} |H_{J^k}^{U^k}(X^k)| .$$

Jetzt untersuchen wir

$$\sum_{j^k=0}^{N^k} |H_{J^k}^{U^k}(X^k)| \leq \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^d \sum_{j_i=0}^{n_i} |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| .$$

Für $u_1 = 0$ folgt mit der $\frac{1}{2}$ -Normalität der Knoten

aus (6.22) : $\sum_{j_i=0}^n |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| \equiv 1$. Für $u_1 = 1$ folgt aus

Hilfssatz 6.6 die Beziehung: $\sum_{j_i=0}^n |h_{j_i}^{u_i}(x_i)| = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$.

Endgültig erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\|R_n(f)\| &\leq \left\{ \sum_{u=0}^j \prod_{i=1}^d O(1) \right\} \cdot O\left(\frac{\log n}{n}\right) \\ &= O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Mit Beweisteil (a) erhalten wir für $f \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$):

$$\begin{aligned}\|G_n(f) - f\| &\leq \|F_n(f) - f\| + \|R_n(f)\| \\ &= \begin{cases} O\left(\frac{\log n}{n}\right) & \text{für } \alpha = 1 \\ O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) & \text{für } 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{und } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Da der Fejér-Operator ein Spezialfall des verallgemeinerten Hermite-Operators ist, gelten für ihn ebenfalls die Abschätzungen von Satz 6.12.

§ 7 Konvergenz der Lagrange-Interpolation

Zum Konvergenzbeweis der Lagrange-Interpolation verwenden wir

Lemma 7.1 (F. LOCHER [1968])

Es seien Y und Z normierte lineare Räume, R eine stetige lineare Abbildung von Y in Z , $V = \{y \in Y \mid R(y) = 0\} \subset Y$ und ϑ_V die Approximationskonstante von $f \in Y$ bezüglich V :

$$\vartheta_V(f) = \inf_{g \in V} \|f - g\| .$$

Dann gilt die Abschätzung

$$\|R(f)\| \leq \|R\| \cdot \vartheta_V(f) .$$

Definition 7.2

Auf dem Rechteckgitter $W \in \mathcal{R}_N$ definieren wir den d -dimensionalen Lagrange-Operator $L_N : C(E) \longrightarrow C(E)$ durch

$$(7.1) \quad f \longrightarrow L_N(f) = \sum_{j=0}^N \Lambda_j \cdot f(X_j) \quad (X_j \in W) .$$

Offenbar ist L_N stetig und linear. Ferner sei

$$(7.2) \quad E_N(f) = \inf \{ \|f - P\| \mid P \in \mathcal{H}_N \}$$

und

$$(7.3) \quad \lambda_N = \|L_N\| = \sup \{ \|L_N(f)\| \mid \|f\| \leq 1 \} .$$

Aus Lemma 7.1 erhalten wir mit $Y = Z = C(E)$ und $R = L_N - I$ (I ist der identische Operator)

Satz 7.3

Für den zu W gehörenden Lagrange-Operator L_N gilt:

$$\|L_N(f) - f\| \leq (\lambda_N + 1) \cdot E_N(f) .$$

Für Konvergenzaussagen ($N \rightarrow \infty$) benötigen wir daher eine Abschätzung von $E_N(f)$ und λ_N .

Im Mehrdimensionalen gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Jackson (siehe etwa A.F. TIMAN [1963]):

Satz 7.4

Es sei f eine Abbildung von E in $\mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial^{u_i}}{\partial x_i^{u_i}} f \in \text{Lip } \alpha_i$. Dann ist

$$E_N(f) = O \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{n_i^{u_i + \alpha_i}} \right) \quad \text{für } n_i \rightarrow \infty ,$$

wenn $0 < \alpha_i < 1$ ist. Für $\alpha_i = 1$ steht an Stelle von

$$\frac{1}{n_i^{u_i + 1}} \quad \text{der Ausdruck} \quad \frac{\log n_i}{n_i^{u_i + 1}} .$$

Wir müssen jetzt noch λ_N abschätzen.

Nach Definition 3.7 und Satz 3.8 ist L_N den d ein-dimensionalen Lagrange-Operatoren L_{n_i} zugeordnet.

Für die L_{n_i} sind die Lebesgue-Konstanten λ_{n_i} durch

$$(7.4) \quad \lambda_{n_i} = \|L_{n_i}\| = \sup \{ \|L_{n_i}(f)\| \mid \|f\| \leq 1 \}$$

gegeben. Es gilt

Satz 7.5

Für die d -dimensionale Lebesgue-Konstante aus (7.3) gilt

$$(7.5) \quad \lambda_N = \prod_{i=1}^d \lambda_{n_i}.$$

Beweis:

Nach Definition von λ_N , λ_{n_i} und Formel (5.9) gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_N = \|L_N\| &= \sup_{X \in E} \sum_{j=0}^N |\wedge_j(X)| = \\ &= \sup_{X \in E} \sum_{j=0}^N \prod_{i=1}^d |l_{j_i}(x_i)| = \prod_{i=1}^d \sup_{x_i \in [-1,1]} \sum_{j_i=0}^{n_i} |l_{j_i}(x_i)| = \prod_{i=1}^d \lambda_{n_i}. \end{aligned}$$

Nach einem Satz von S. N. Bernstein (vgl. I. P. NATANSON [1964/5]) gilt für eine Knotenmatrix $\overline{m}_i$, die aus den Nullstellen der Čebyšev-Polynome besteht:

$$(7.6) \quad \lambda_{n_i} = O(\log n_i) \quad (n_i \rightarrow \infty).$$

Hieraus erhält man unmittelbar

Satz 7.6

Für $N_m \rightarrow \infty$ sei $(M_{N_m})_{m \in \mathbb{N}_*}$ die zugehörige Čebyšev-Gitterfolge gemäß (6.31). Dann erhalten wir für die mehrdimensionale Lebesgue-Konstante zu $(M_{N_m})_{m \in \mathbb{N}_*}$:

$$(7.7) \quad \lambda_N = O \left(\prod_{i=1}^d \log n_i \right).$$

Satz 7.7

Für $n = (n, \dots, n)$ sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ die zugehörige Čebyšev-Gitterfolge gemäß (6.31).

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Abbildung aus $\text{Lip } \alpha$. Dann gilt für den d-dimensionalen Lagrange-Operator ($n \rightarrow \infty$) :

$$\|L_n(f) - f\| = \begin{cases} O \left(\frac{(\log n)^{d+1}}{n} \right), & \text{für } \alpha = 1 \\ O \left(\frac{(\log n)^d}{n^\alpha} \right) & \text{für } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Beweis:

Wir erhalten dieses Ergebnis unmittelbar aus den Abschätzungen für λ_N und $E_N(f)$.

Bemerkung 7.8

Für reelle analytische Funktionen in d Veränderlichen und Čebyšev-Gitterfolgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ hat J. M. SLOSS [1967] die Konvergenz des d-dimensionalen Lagrange-Operators bewiesen.

Zum Schluß wollen wir noch die Konvergenz des Lagrange-Operators für P -normale Gitterfolgen betrachten. Wiederum wollen wir dabei voraussetzen, daß in jeder Achsenrichtung gleichviele Punkte gewählt werden.

Satz 7.9

Die Gitterfolge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ sei aus $\Gamma_P(n)$ mit $0 < P \leq 1$, die Abbildung $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in jeder Koordinatenrichtung $\left[\frac{d}{2}\right]$ -mal differenzierbar und es sei

$$\frac{\partial^{\left[\frac{d}{2}\right]}}{\partial x_i} f \in \text{Lip } \alpha \quad (1 \leq i \leq d)$$

mit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha > 0 & \text{für } d = 2d' \\ \alpha > \frac{1}{2} & \text{für } d = 2d' + 1 \end{array} \right\} .$$

Dann gilt

$$\|L_n(f) - f\| = o(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty .$$

Beweis:

Wir führen den Beweis für $0 < \alpha < 1$. Der Fall $\alpha = 1$ bereitet keine Mühe.

Nach I. P. NATANSON [1964/5] gilt für $\mathfrak{S}_1$ -normale Knotenmatrizen m_i :

$$(7.8) \quad \lambda_{n_i} \leq c_i \cdot \sqrt{n_i} \quad .$$

Daraus erhalten wir nach Satz 7.5

$$1 + \lambda_n \leq C \cdot n^{\frac{d}{2}} \quad .$$

Mit Hilfe von Satz 7.3 und Satz 7.4 erhalten wir unter Verwendung der Voraussetzung über α :

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - f\| &\leq C \cdot n^{\frac{d}{2}} \cdot O\left(\frac{1}{n^{[1]+\alpha}}\right) \\ &= O\left(\frac{n^{\frac{d}{2}}}{n^{[1]+\alpha}}\right) = o(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad . \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- AMELKOVIC, V. G. [1961]: Die Ordnung der Annäherung stetiger Funktionen mit Fejér-Hermite-Interpolationspolynomen. Polytechn. Inst. Odessa, Naucnyje Zapiski 34, 70-77. (Russ.).
- BOURBAKI, N. [1948]: Eléments de Mathématique, Liv. II: Algèbre, Chap. III, Algèbre multilinéaire. Paris: Hermann u. Cie.
- DAVIS, P. J. [1965]: Interpolation and Approximation. New York-Toronto-London: Blaisdell.
- FEJER, L. [1930]: Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Z. 32, 426-457.
- GREUB, W. H. [1963]: Linear Algebra. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.
- GRÜNWARD, G. [1943]: On the theory of interpolation, Acta Math. 75, 219-245.
- KOROVKIN, P. P. [1960]: Linear Operators and Approximation Theory. Delhi: Hindustan Publ. Corp.
- LOCHER, F. [1968]: Approximationsverfahren zur Gewinnung von ableitungsfreien Schranken für Quadraturfehler. Diss. Tübingen.

- MEINARDUS, G. [1964]: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
- MILNE, W.E., W. ARNTZEN, N. REYNOLDS und J. WHEELOCK [1958]: Mathematics for Digital Computers, Vol. I : Multi-variative Interpolation. Wright Air Development Center, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- MOND, B. und O. SHISHA [1966a]: The rapidity of convergence of the Hermite-Fejér-Approximation to functions of one or several variables. Proc. AMS 16, 1269-1276.
- [1966b]: On the approximation of functions of several variables. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 70 B, 211-218.
- MÜLLER, M. [1955]: Über Interpolation mittels ganzer rationaler Funktionen. Math. Z. 62, 292-309.
- NATANSON, I. P. [1964/5]: Constructive Function Theory, Vol. I-III. New York: Ungar.
- RICE, J. R. [1964]: The Approximation of Functions. Reading, Mass.-Palo Alto-London: Addison-Wesley.
- SALZER, H. E. [1945]: Note on interpolation for a function of several variables. Bull. AMS 51, 279-280.
- [1948]: Tables of coefficients for interpolating in functions of two variables. Journ. Math. Phys. 26, 294-305.

- SALZER, H. E. [1957]: Note on multivariate interpolation for unequally spaced arguments, with application to double summation. Journ. SIAM 5, 254-262.
- [1959]: Some new divided difference algorithms for two variables. Erschienen in: On Numerical Approximation. Proc. of a Symp., Madison, 61-98; Herausgeber: R.E. LANGER, University of Wisconsin Press.
- SALZER, H. E. und G. M. KIMBRO [1958]: Tables for bivariate osculatory interpolation over a cartesian grid. Convair Division of General Dynamics Corporation, San Diego, 40 ff.
- SAXENA, R. B. [1960]: Convergence of interpolatory polynomials, (0,1,2,4) interpolation. Trans. AMS 95, 361-385.
- SAXENA, R. B. und A. SHARMA [1958]: On some interpolatory properties of Legendre polynomials. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 345-358 .
- SLOSS, J. M. [1967]: Approximation by interpolation of certain real compact analytic surfaces. Math. Z. 100, 272-281.
- SURANYI, J. und P. TURAN [1955]: Notes on interpolation I. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6, 67-80.

THACHER, H.C. Jr. [1958]: Generalizations of concepts related to linear dependence. Journ. SIAM 6, 288-299.

----- [1960]: Derivation of interpolation formulas in several independent variables. Annals of the New York Acad. of Sciences 86, 758-775.

THACHER, H.C. Jr. und W.E. MILNE [1960]: Interpolation in several variables. Journ. SIAM 8, 33-42.

TIMAN, A.F. [1963]: Theory of Approximation of functions of a Real Variable. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon.

TUREZKII, A.H. und G.N. TOROPOVA [1967]: An estimate for functions satisfying a Lipschitz condition by the Fejér-Hermite interpolation formula. Veszi Akad. Navuk Belaruskai SSR, Seria Fisika-Matem. Navuk, 1, 76-92. (Russ.).

WHAPLES, G.W. [1958]: A note on degree- n independence. Journ. SIAM 6, 300-301.

L e b e n s l a u f

Am 12. November 1941 wurde ich, Werner Haußmann, als Sohn des Bildhauermeisters Alfred Haußmann und seiner Ehefrau Johanna, geb. Rump, in Nürtingen geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Nürtingen war ich von 1952 an Schüler des Gymnasiums Nürtingen. Im Frühjahr 1961 bestand ich dort die Reifeprüfung. Dann begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, wo ich im Juli 1966 die Diplomprüfung in Mathematik ablegte.

Anschließend war ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum angestellt. In dieser Zeit entstand unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. H. Ehlich die vorliegende Arbeit "Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen".

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren W. Braunbek, H. Ehlich, H. Krüger, G. Möllenstedt, M. Müller, G. Pickert, P. Roquette, H. H. Schaefer, H. Wielandt und K. Zeller.

BAMBERGER FOTODRUCK · RUDOLF RODENBUSCH
8600 BAMBERG · Markusplatz 22 · Tel.: 0951/6 27 94